p. 313

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

N°. 4. *Juillet* 1812. (IIe. Volume.) (*).

§. I.

Des Surfaces du second degré.

M. Monge *à M.* Hachette (22 *mars* 1812).

Vous aviez proposé aux élèves de l'Ecole Polytechnique de trouver les relations qui doivent exister entre les coefficiens de l'équation générale des surfaces du second degré, pour que la surface soit de révolution : trois élèves, MM. Urban, Merle et Mondot, ont très-bien résolu la question ; et en publiant leurs solutions, vous avez prouvé les progrès qu'ils avoient faits dans la géométrie et l'analyse. Mais je suis surpris de ce que, pour la question dont il s'agit, les élèves de l'Ecole Polytechnique, qui connoissent si bien l'équation des surfaces de révolution, n'ont pas fait usage de cette équation générale, qui semble n'avoir pas d'autre destination, et qui les auroit dispensés de toute considération géométrique nouvelle. Je vais le faire.

I. Je suppose, comme M. Mondot, que la surface soit rapportée à son centre comme origine, et que son équation soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2(Dyz+Ezx+Fxy)=H.$$

Si cette surface est de révolution, son axe de révolution doit

(*) Il y a une erreur de pagination dans le troisième cahier qui précédé celui-ci. La première page de ce cahier est cotée 187 : elle devoit être marquée du nombre 137.

passer par le centre, et les équations de cet axe sont de la forme

$$x = mz$$

$$y = nz$$

dans lesquelles les constantes m, n, sont encore indéterminées. Or, les élèves savent que l'équation aux différences partielles de la surface de révolution autour de cet axe est

$$p(nz - y) - q(mz - x) + nx - my = o;$$

il faut donc que cette équation soit satisfaite par celle de la surface du second degré.

Si l'on différencie aux différences partielles l'équation de la surface du second degré, pour avoir les valeurs de p et de q, on a

$$Ax + Fy + Ez + p\{Ex + Dy + Cz\} = o,$$

$$Fx + By + Dz + q\{Ex + Dy + Cz\} = o;$$

et si l'on substitue pour p et q ces valeurs dans l'équation des surfaces de révolution, on obtient

$$-(nz - y)(Ax + Fy + Ez) + (mz - x)\{Fx + By + Dz\}$$
$$+ (nx - my\{Ex + Dy + Cz\} = o$$

qui, ordonnée par rapport aux trois coordonnées x, y, z, devient

$$\left.\begin{array}{l} x^2(En - F) \\ -y^2(Dm - F) \\ +z^2(Dm - En) \\ +yz\{(B - C)m - Fn + E\} \\ +zx((C - A)n + Fm - D\} \\ +xy\{Dn - Em + A - B\} \end{array}\right\} = o$$

Cette équation appartient à une troisième surface qui passe par la courbe de contact de la surface de révolution et de celle du second degré. Mais il faut que ces deux dernières surfaces se touchent par-tout, et par conséquent se confondent; donc les

dernière équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x, y, z, c'est-à-dire indépendamment de ces valeurs; donc il faut que les six coefficiens soient chacun égal à zéro, ou que l'on ait en même temps les six équations

$$\begin{aligned}
En - F &= 0\\
Dm - F &= 0\\
Dm - En &= 0\\
(B-C)m - Fn + E &= 0\\
(C-A)n + Fm - D &= 0\\
Dn - Em + A - B &= 0
\end{aligned}$$

Mais, de ces six équations, les deux premières comportent la troisième, et servent à déterminer les valeurs de m et n, qui sont

$$m = \frac{F}{D},\ n = \frac{F}{E}$$

et par conséquent à déterminer la direction de l'axe de révolution; de plus, si l'on met pour m et n leurs valeurs dans les trois dernières, elles deviennent

$$\begin{aligned}
(A-B)DE + F(D^2 - E^2) &= 0\\
(C-A)FD + E(F^2 - D^2) &= 0\\
(B-C)EF + D(E^2 - F^2) &= 0
\end{aligned}$$

dont deux quelconques comportent encore la troisième.

Donc, la surface du second degré sera de révolution, lorsque deux quelconques des trois dernières équations seront satisfaites; et les équations de l'axe de révolution seront

$$Dx = Fz,\ Ey = Fz$$

ce qui est conforme aux résultats donnés par MM. Urban, Merle et Mondot.

II. On peut employer de la même manière l'équation aux différences partielles de toute autre surface générale; je vais en donner quelques exemples.

Posons qu'il s'agisse de trouver la relation qui doit exister entre les coefficiens de l'équation de la surface du second

degré, pour que cette surface soit cylindrique. On sait que si les équations de la droite menée par l'origine, et à laquelle la génératrice de la surface est constamment parallèle, sont

$$x = m z, \quad y = n z$$

l'équation générale des surfaces cylindriques est

$$m p + n q = 1.$$

Si l'on substitue pour p et q les valeurs que donne l'équation des surfaces du second degré, et que nous avons données dans l'article précédent, on a

$$m\{Ax+Fy+Ez\}+n\{Fx+By+Dz\}+Ex+Dy+Cz=0$$

qui, ordonnée par rapport aux coordonnées x, y, z, devient

$$x\{Am+Fn+E\}+y\{Fm+Bn+D\}+z\{Em+Dn+C\}=0.$$

Cette équation doit être satisfaite, indépendamment des valeurs de x, y, z; on aura donc les trois équations

$$Am+Fn+E=0$$
$$Fm+Bn+D=0$$
$$Em+Dn+C=0$$

dont deux quelconques, par exemple les deux premières, détermineront les valeurs suivantes de m et n,

$$m(AB-F^2)+BE-DF=0$$
$$n(AB-F^2)+AD-EF=0$$

et qui, par l'élimination de m et n, donneront l'équation

$$AD^2+BE^2+CF^2=ABC+2DEF$$

qui doit avoir lieu entre les coefficiens.

Ainsi, la surface du second degré sera cylindrique, lorsque les coefficiens de l'équation générale satisferont à l'équation precedente; et alors la direction de la droite génératrice du cylindre sera déterminée par les valeurs de m et n.

III. S'il s'agit de trouver la relation qui doit exister entre les coefficiens de la surface du second degré pour que cette sur-

face soit conique, on remarquera d'abord que le centre, c'est-à-dire le sommet, de la surface conique sera placé à l'origine.

Or, l'équation des surfaces coniques, dont le sommet est à l'origine, est

$$z-px-qy=0$$

Substituant donc pour p et q leurs valeurs prises dans l'équation de la surface du second degré, on aura

$$x\{Ax+Fy+Ez\}+y\{Fx+By+Dz\}+z\{Ex+Dy+Cz\}=0$$

qui, ordonnée par rapport aux coordonnées, devient

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2\{Dyz+Ezx+Fxy\}=0$$

et qui doit être satisfaite. Mais cette équation n'est autre chose que le premier membre de l'équation des surfaces du second degré, et ne peut subsister à moins que le second membre soit aussi égal à zéro. Donc la surface du second degré sera conique, lorsque son dernier terme sera nul, c'est-à-dire lorsqu'on aura $H=0$. Ce que l'on savoit déjà.

IV. Pour terminer, je vais chercher les relations qui doivent exister entre les coefficiens de la surface du second degré, pour que cette surface soit développable.

On sait que l'équation générale des surfaces développables est

$$rt-s^2=0$$

il faut donc différencier partiellement les valeurs de p et q qui appartiennent à la surface du second degré, pour avoir celles de r, s, t. Cette différenciation donne

$$\begin{aligned}
&A+2Ep+Cp^2 &&+r\{Ex+Dy+Cz\}=0\\
&F+Eq+Dp+Cpq &&+s\{Ex+Dy+Cz\}=0\\
&B+2Dq+Cq^2 &&+t\{Ex+Dy+Cz\}=0
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs de r, s, t, dans $rt-s^2=0$, on a

$$\{A+2Ep+Cp^2\}\{B+2Dq+Cq^2\}-\{F+Eq+Dp+Cpq\}^2=0$$

qui, ordonnée par rapport aux deux variables p, q, devient

$$\left.\begin{aligned}
&p^2(BC-D^2)+q^2(CA-E^2)+AB-F\\
&+2\{pq(DE-CF)+p(BE-DF)+q(AD-EF)\}
\end{aligned}\right\}=0$$

Substituant enfin pour p et q, leurs valeurs en x, y, z, que nous avons données, art. I, on a

$$(M)\quad \left.\begin{array}{r} \{Ax+Fy+Ez\}^2(BC-D^2) \\ +\{Fx+By+Dz\}^2(CA-E^2) \\ +\{Ex+Dy+Cz\}^2(AB-F^2) \\ +2\{Ax+Fy+Ez\}\{Fx+By+Dz\}(DE-CF) \\ +2\{Ex+Dy+Cz\}\{Ax+Fy+Ez\}(DF-BE) \\ +2\{Fx+By+Dz\}\{Ex+Dy+Cz\}(EF-AD) \end{array}\right\}=0$$

équation qui doit être satisfaite, quelles que soient les valeurs x, y, z, pour que la surface du second degré soit développable : or, si l'on développe cette équation, on reconnoît facilement qu'elle est composée des deux facteurs

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2(Dyz+Ezx+Fxy)=0$$
$$AD^2+BE^2+CF^2-ABC-2DEF\qquad=0$$

qui peuvent avoir lieu indépendamment l'un de l'autre ; de plus, le premier de ces facteurs est le premier membre de l'équation des surfaces du second degré, et se réduit à $H=0$, donc la surface du second degré sera développable dans les deux cas suivans,

1°. Lorsqu'on aura

$$H=0,$$

2°. Lorsqu'on aura

$$AD^2+BE^2+CF^2-ABC-2DEF=0$$

ce qui reproduit le cas des surfaces cylindriques et celui des surfaces coniques, que nous avons traités, art. II et III.

Enfin la surface du second degré sera encore développable lorsque l'équation (M) sera satisfaite, indépendamment des valeurs de x, y, z, ce qui aura lieu lorsqu'on aura les six équations suivantes,

$$BC-D^2=0,\quad CA-E^2=0,\quad AB-F^2=0,$$
$$DE-CF=0,\quad EF-AD=0,\quad FD-BE=0.$$

Or, il est facile de voir que si les trois équations de la première ligne ont lieu, celles de la seconde ligne s'ensuivent nécessairement ; donc la surface du second degré sera encore développable, lorsqu'on aura les trois équations

$$BC - D^2 = 0$$
$$CA - E^2 = 0$$
$$AB - F^2 = 0$$

et alors son équation deviendra

$$\{x\sqrt{A} + y\sqrt{B} + z\sqrt{C}\}^2 = H,$$

qui appartient au système de deux plans parallèles entr'eux ; ce qui est un cas très-particulier des surfaces cylindriques.

Des Propriétés générales des Surfaces du second degré.

M. Monge doit publier, dans le prochain cahier du Journal de l'École Polytechnique, un mémoire sur quelques propriétés générales des surfaces du second degré; nous allons en extraire les principaux résultats, sans en rapporter les démonstrations.

I. Lorsque deux surfaces quelconques du second degré sont concentriques, il y a toujours dans chacune d'elles trois diamètres conjugués, dont les directions sont les mêmes que celles de trois diamètres conjugués considérés dans l'autre ; en sorte que, si l'on circonscrit à chacune de ces surfaces le parallélipipède formé sur les trois diamètres conjugués dont il s'agit, ces deux parallélipipèdes, qui ne seront point semblables entre eux, seront néanmoins tels, que toutes les faces de l'un seront respectivement parallèles aux faces de l'autre.

On peut donner le nom de *droites diamétrales conjuguées communes*, aux trois directions communes de ces six diamètres considérés deux à deux.

II. Si l'on rapporte les deux surfaces concentriques à leurs trois droites diamétrales conjuguées communes par des coordonnées qui soient respectivement parallèles à ces droites, leurs équations seront symétriques, et de la forme

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = 1 \text{ pour l'une,}$$
$$\text{et } A'\,x^2 + B'\,y^2 + C'\,z^2 = 1 \text{ pour l'autre.}$$

Par conséquent l'intersection des deux surfaces sera toujours comprise en même temps sur les surfaces de trois cylindres qui auront pour bases des sections coniques, et qui seront parallèles aux trois droites diamétrales conjuguées communes : en sorte que les deux surfaces du second degré et les trois surfaces cylin-

driques se couperont toutes cinq dans la même intersection commune.

Cela fournit une construction des trois droites diamétrales conjuguées communes, qui deviennent les trois axes rectangulaires de l'une des deux surfaces, lorsque l'autre est celle d'une sphère.

III. Les trois droites diamétrales conjuguées communes ne jouissent pas toutes trois des mêmes propriétés. Pour deux de ces droites, si les diamètres des deux surfaces qui se trouvent sur l'une d'elles sont égaux entr'eux, les surfaces se touchent dans deux points diamétralement opposés, et n'ont pas d'autres points communs : pour la troisième, si les diamètres des deux surfaces sont égaux entr'eux, non-seulement les surfaces se touchent en deux points diamétralement opposés ; mais encore elles se coupent dans le systême de deux courbes planes pour lesquelles les deux points de contact des surfaces sont deux points d'intersection.

Cela oblige à distinguer les trois droites diamétrales conjuguées communes en deux *extrêmes* et une *moyenne*.

IV. Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les deux surfaces quelconques du second degré ne sont pas concentriques, et quelque part que soient placés leurs centres, il y a toujours dans chacune d'elles trois diamètres conjugués, qui sont respectivement parallèles à trois diamètres conjugués considérés dans l'autre. Les deux surfaces n'en ont pas moins trois droites diamétrales conjuguées communes ; mais ces trois droites ne contiennent plus effectivement, comme dans le premier cas, les deux diamètres conjugués respectifs : elles leur sont simplement parallèles.

En sorte que, si l'on rapporte les deux surfaces à ces trois droites diamétrales par des coordonnées qui soient respectivement parallèles à ces droites, et en nommant a, b, c, les trois distances des deux centres mesurées dans les sens des coordonnées, les équations des deux surfaces seront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

pour celle dont le centre est placé à l'origine,

et $A'(x-a)^2 + B'(y-b)^2 + C'(z-c)^2 = 1$

pour l'autre.

De ces trois droites diamétrales conjuguées communes, deux sont extrêmes, tandis que l'autre est moyenne.

V. Lorsque deux surfaces quelconques se touchent en deux points, la corde commune qui passe par les deux points de contact est toujours parallèle à l'une des trois droites diamétrales conjuguées communes : cette droite diamétrale est une des extrêmes, si les deux surfaces n'ont d'autres points communs que leurs deux points de contact; elle est, au contraire, la droite diamétrale moyenne, si les deux surfaces se coupent en même temps qu'elles se touchent, et alors l'intersection est composée du système de deux courbes planes pour lesquelles les deux points de contact des surfaces sont deux points d'intersection.

Dans les deux cas, le plan mené par les centres des deux surfaces et par le milieu de la corde commune est le plan diamétral commun, opposé à la corde commune : et de plus, les deux plans tangens communs aux deux surfaces et menés par les deux points de contact se coupent dans une droite qui est comprise dans ce plan diamétral.

VI. Deux surfaces quelconques du second degré étant données, si 1°. leurs centres sont placés sur une même droite diamétrale conjuguée commune extrême; et si 2°. les sections faites dans les deux surfaces par le plan diamétral opposé à cette droite diamétrale commune, sont semblables entr'elles et semblablement placées, l'intersection des deux surfaces est composée du système de deux courbes planes du second degré, semblables entr'elles, semblablement placées, et dont les deux plans sont parallèles au plan diamétral, et par conséquent parallèles entre eux. La distance de ces deux plans dépend alors de celle des deux centres et du rapport commun qui existe entre les dimensions homologues des sections semblables faites par le plan diamétral.

Si, de plus, le rapport entre les dimensions homologues des sections semblables est tel, que la distance de ces deux plans soit nulle, les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre, c'est-à-dire qu'elles se touchent dans une courbe. Cette courbe est toujours plane, et son plan est parallèle au plan diamétral opposé à la droite diamétrale menée par les deux centres.

Deux surfaces du second degré ne peuvent être circonscrites l'une à l'autre, à moins que ces conditions soient toutes trois satisfaites.

VII. Lorsque deux surfaces quelconques du second degré sont circonscrites à une même troisième surface du second degré, elles se coupent toujours dans le système de deux courbes planes du second degré.

Les plans de ces deux courbes se coupent toujours dans la même droite que les plans des courbes de contact des deux sur-

faces avec la troisième, et cette droite est parallèle à la droite diamétrale conjuguée moyenne commune aux deux surfaces.

Les deux courbes planes de l'intersection et les deux courbes planes de contact des deux surfaces avec la troisième passent toutes quatre par deux mêmes points qui sont en même temps deux points de contact communs aux trois surfaces.

Enfin, en regardant le système de deux plans comme une surface du second degré, les cinq surfaces du second degré suivantes, savoir,

Les deux surfaces circonscrites à la même troisième,

Le système des deux plans de leurs courbes de contact avec la troisième,

Le système des deux plans de leur intersection mutuelle,

Et le système des deux plans tangens communs aux trois surfaces, ont toutes les mêmes droites diamétrales conjuguées communes; et la moyenne de ces droites diamétrales est celle qui est parallèle à la droite menée par les deux points de contact communs.

VIII. Lorsque deux surfaces quelconques du second degré se coupent dans le système de deux courbes planes, ces deux courbes se trouvent toujours en même temps sur deux surfaces coniques du second degré, et sont par conséquent les intersections mutuelles de quatre surfaces du second degré.

Ces quatre surfaces, et le système des deux plans de leur intersection commune, ont les mêmes droites diamétrales conjuguées communes; la moyenne de ces droites diamétrales est parallèle à la droite dans laquelle se coupent les deux plans de l'intersection; et le plan diamétral opposé à cette droite contient les sommets des deux surfaces coniques.

IX. Etant données une surface quelconque du second degré et une droite placée d'une manière quelconque par rapport à elle : si par la droite on fait passer tant de plans qu'on voudra, et dont chacun coupe la surface suivant une courbe; et si pour chaque plan on conçoit la surface conique circonscrite à la surface donnée, et qui la touche dans la section faite par le plan, on aura autant de surfaces coniques différentes, circonscrites à la même surface du second degré, qu'on aura de plans. Cela posé,

1°. Les sommets de toutes les surfaces coniques circonscrites seront dans une même seconde ligne droite;

2°. Chaque surface conique coupera chacune des autres dans le système de deux courbes planes;

3°. Les plans des intersections mutuelles des surfaces coniques passeront tous par la droite donnée ;

4°. La surface donnée, toutes les surfaces coniques circonscrites, et tous les systêmes de plans qui renferment les intersections des surfaces coniques, considérées deux à deux, auront les mêmes droites diamétrales conjuguées communes. La droite donnée sera parallèle à la droite diamétrale moyenne, et la droite qui passe par les sommets des surfaces coniques sera parallèle à une des droites diamétrales extrêmes.

Les deux droites que nous avons considérées dans cet article jouissent, l'une par rapport à l'autre, de propriétés qui sont réciproques ; c'est-à-dire que tout ce que nous avons dit de la seconde par rapport à la première, doit être dit réciproquement de la première par rapport à la seconde ; excepté que si l'une d'elles coupe la surface, l'autre ne la coupe pas.

Enfin, si par le centre de la surface on mène la droite qui coupe en même temps les deux droites que nous venons de considérer chacune en un point, cette troisième droite coupera la surface en un troisième point. Cela posé, les distances de ces trois points au centre de la surface sont en proportion géométrique continue, et c'est la distance du point de la surface qui est la moyenne.

Théorême

Sur les Surfaces du second degré.

Par M. J. Binet.

Dans le deuxième numéro du premier volume de cette Correspondance, M. Livet a énoncé les deux théorêmes suivans :

La somme des carrés des trois axes conjugués d'une surface du deuxième degré est constante ;

Le volume du parallélipipède construit sur ces axes est constant.

Il existe une troisième relation entre ces axes conjugués, que l'on peut énoncer ainsi :

La somme des carrés des faces de ce parallélipipède est constante.

Si donc l'on désigne par a', b', c', les trois demi axes conjugués, réels ou imaginaires, d'une surface du second ordre, on aura

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = L,$$

$$a'^2 b'^2 \sin^2(a', b') + a'^2 c'^2 \sin^2(a', c') + b'^2 c'^2 \sin^2(b', c') = M,$$

$$a'^2 b'^2 c'^2 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos^2(a', b') - \cos^2(a', c') - \cos^2(b', c') \\ + 2\cos(a', b')\cos(a', c')\cos(b', c') \end{array} \right\} = N.$$

Lorsque les angles (a', b'), (a', c'), (b', c') de ces axes conjugués deviendront droits, ces axes se confondront avec les axes principaux de la surface. On aura donc alors, en désignant par a, b, c, ces demi axes principaux,

$$a^2 + b^2 + c^2 = L,$$

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 = M,$$

$$a^2 b^2 c^2 = N;$$

en sorte que les trois constantes L, M, N, sont les coefficiens d'une équation ayant pour racines les carrés des trois demi axes principaux : cette équation seroit

$$p^3 - Lp^2 + Mp - N = 0.$$

De l'Equation qui a pour racines les carrés des demi-axes principaux d'une surface du second degré.

Par M. Hachette.

L'équation générale des surfaces du second degré rapportées à trois axes rectangulaires, passant par le centre de ces surfaces, est

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 1;$$

équation qui se réduit à

$$(2) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1,$$

lorsque les axes des coordonnées se confondent avec les axes principaux de la surface.

Les axes réels ou imaginaires étant $2a$, $2b$, $2c$, on a

$$P = \frac{1}{a^2},\ P' = \frac{1}{b^2},\ P'' = \frac{1}{c^2};$$

les valeurs de P, P', P'', sont les trois racines de l'équation suivante en t,

$$\left.\begin{array}{l}t^3-(A+A'+A'')t^2+(A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)\,t\\ +AB^2+A'B'^2+A''B''^2-2BB'B''-AA'A''\end{array}\right\}=0\,(E).$$

et les valeurs des carrés a^2, b^2, c^2, des demi axes principaux sont les racines de l'équation en $u=\frac{1}{t}$;

$$u^3-\frac{(A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)}{K}u^2$$

$$+\frac{(A+A'+A'')}{K}u-\frac{1}{K}=0,$$

dans laquelle

$$K=AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2.$$

Cette équation en u est identique avec l'équation en p de l'article précédent,

$$p^3-Lp^2+Mp-N=0.$$

quant à l'équation (E), M. Petit l'obtient par un calcul très-simple, qui est fondé sur cette considération, que l'expression de $x^2+y^2+z^2$, ne change pas, quel que soit le système des trois coordonnées rectangulaires x, y, z, auxquelles la surface est rapportée.

Nommant u^2 cette expression, $x^2+y^2+z^2$,

on aura, en faisant $x=\alpha z$, $y=\beta z$,

$$u^2=z^2(1+\alpha^2+\beta^2)$$

et supposant $\frac{1}{u^2}=t$, $t=\frac{1}{z^2(1+\alpha^2+\beta^2)}$

mettant dans cette équation pour z^2 sa valeur tirée de l'équation (1), on a

$$(a)\quad t=\frac{A\alpha^2+A'\beta^2+A''+2B\beta+2B'\alpha+2B''\alpha\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

Substituant dans l'équation (2) pour x et y les valeurs $\alpha' z$, $\beta' z$, on en conclut la valeur de z^2, et par suite la valeur suivante de t:

$$(b) \qquad t = \frac{P\alpha'^2 + P'\beta'^2 + P''}{1 + \alpha'^2 + \beta'^2},$$

Les valeurs *maxima* ou *minima*, et en général les valeurs singulières de t, seront également données par les équations (a) et (b), pourvu qu'on fasse dans la première (a),

$$\frac{dt}{d\alpha} = 0. \qquad \frac{dt}{d\beta} = 0.$$

et dans la seconde (b),

$$\frac{dt}{d\alpha'} = 0. \qquad \frac{dt}{d\beta'} = 0.$$

mais si on met l'équation (b) sous la forme :

$$t(1 + \alpha'^2 + \beta'^2) = P\alpha'^2 + P'\beta'^2 + P'',$$

en la différenciant successivement par rapport à α', et à β', et éliminant α', β', l'équation finale (c)

$$(c) \qquad (t - P)\,(t - P')\,(t - P'') = 0.$$

a évidemment pour racines les quantités P, P', P''.

Mettant l'équation (a) sous la forme

$$(a') \quad t(1 + \alpha^2 + \beta^2) = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'' + 2B\beta + 2B'\alpha + 2B''\alpha\beta.$$

la différenciant successivement par rapport à α et à β, et faisant

$$\frac{dt}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{dt}{d\beta} = 0,$$

on aura

$$(3) \qquad \alpha t = A\alpha + B''\beta + B'.$$

$$(4) \qquad \beta t = A'\beta + B''\alpha + B.$$

Si maintenant des équations (a'), (3), (4), on élimine α, β, l'équation finale en t devra avoir les mêmes racines que l'équation (c).

Tirant les valeurs de α, β, des équations (3) et (4), on trouve

$$\alpha = B'(t - A') + BB' : (t - A)(t - A') - B''^2,$$

$$\beta = B(t - A) + B'B'' : \qquad Idem.$$

ajoutant l'équation (3), multipliée par α, à l'équation (4) multipliée par β, et retranchant de l'équation (a'), on trouve

$$t - A'' = B\beta + B'\alpha.$$

Substituant dans cette dernière les valeurs précédentes de α, β, on a

$$(t-A)(t-A')(t-A'') - B^2(t-A) - B'^2(t-A') - B''^2(t-A'') - 2BB'B'' = 0.$$

Si l'on effectue les produits indiqués, on retrouve l'équation (E), qui a pour racines les trois quantités P, P', P'' de l'équation (2).

Cette équation ayant nécessairement ses trois racines réelles, puisque les quantités P, P', P'', le sont, M. Petit conclut qu'on pourra déterminer les signes de ces racines, au moyen de la règle de Descartes. Ou les trois racines seront positives, ou deux seront positives et une négative, ou on aura une racine positive et deux négatives, ou enfin les trois racines seront négatives.

Dans le premier cas, la surface sera un ellipsoïde; dans le second cas, un hyperboloïde à une nappe; dans le troisième cas, un hyperboloïde à deux nappes; dans le quatrième cas, la surface est imaginaire.

Si l'une des valeurs de t est nulle, la surface sera évidemment un cylindre, et la nature de sa base sera déterminée par les signes des deux autres racines.

S'il y a deux valeurs de t nulles, la surface sera le système de deux plans parallèles.

Si le dernier terme de l'équation (1), au lieu d'être l'unité, se réduit à zéro, il est facile de s'assurer que si P, P', P'', sont tous trois positifs, ou tous trois négatifs, la surface se réduit à un point.

Si les trois quantités P, P', P'', ne sont pas de même signe, la surface est un cône.

Si l'une des trois quantités P, P', P'', est nulle, la surface se réduit à une droite, si les deux autres quantités sont de même signe, ou au système de deux plans, si elles sont de signes différens.

Enfin, si deux des trois quantités P, P', P'', sont nulles, la surface se réduit à un plan.

Méthode pour discuter l'équation générale du second degré entre trois variables, x, y, z.

On cherchera d'abord les coordonnées du centre de la surface. La manière la plus simple de les obtenir consiste à différencier

l'équation proposée successivement par rapport à x, à y, à z. Les trois équations linéaires qui résultent de cette différentiation donneront pour les coordonnées du centre, ou trois valeurs finies, ou des valeurs indéterminées, ou des valeurs infinies.

1°. Supposons les trois valeurs finies. La surface ayant un centre, on la rapportera à ce centre comme origine des coordonnées rectangulaires; on formera l'équation (E), et on déterminera la nature de la surface par la règle énoncée page précedente.

2°. On suppose que les équations qui donnent les coordonnées du centre se réduisent à une ou à deux, auquel cas ces coordonnées sont indéterminées; si les trois équations se réduisent à une seule, la surface est le systême de deux plans parallèles; si elles se réduisent à deux, la surface est alors un cylindre dont l'axe est la droite représentée par les deux équations restantes; en coupant ce cylindre par un plan perpendiculaire à son axe, la section déterminera la nature du cylindre; lorsque cette section sera le systême de deux droites, le cylindre sera réduit à deux plans qui se coupent.

3°. On suppose que les coordonnées du centre soient infinies, ce qui est indiqué par les trois équations qui doivent donner les coordonnées du centre, et qui deviennent incompatibles; alors on coupera la surface par un plan quelconque. Si quelle que soit la position du plan sécant, la section est une parabole, la surface sera un cylindre parabolique. Si la section ne peut pas devenir une ellipse, la surface proposée sera un paraboloïde hyperbolique; si la section ne peut pas devenir une hyperbole, l'équation proposée représente un paraboloïde elliptique.

On a d'ailleurs indiqué (pages 203 et 315 de ce volume) un moyen de reconnoître si la surface proposée est de révolution. On a alors entre les constantes de l'équation générale (1), les équations suivantes :

$$BB'(A-A'')-B''(B'^2-B^2)=0.$$
$$B'B''(A'-A'')-B(B''^2-B'^2)=0.$$
$$B''B(A''-A)-B'(B^2-B''^2)=0.$$

dont deux quelconques comportent la troisième.

La droite des équations $Bx-B''z=0$, $B'y-B''z=0$, est parallèle à l'axe de révolution.

Du Plan tangent à l'hyperboloïde à une nappe. (*Voyez* le Supplément de la Géométrie Descriptive, art. 56, pag. 48);

Par M. Hachette.

Soient PS, RQ, planche A (fig. 1), les axes principaux réels de l'hyperboloïde à une nappe, $PQRS$ l'ellipse construite sur ces droites comme axes, et $XAYA'$, la section faite dans cette surface par un plan parallèle à celui de l'ellipse $PQRS$. Soient de plus xpx', ysy' (fig. 2), les deux branches de l'hyperbole contenue dans le plan XY (fig. 1) perpendiculaire au plan des axes principaux PS, QR.

ps (fig. 2) étant la projection de l'ellipse $PQRS$, xy ou $x'y'$ sera la projection de l'ellipse $XAYA'$ sur le plan de l'hyperbole principale, dont les axes sont dirigés suivant les droites pos, zoz', l'une horizontale, et l'autre verticale.

On donne la projection horizontale M d'un point de l'hyperboloïde, et on demande le plan qui le touche en ce point? La verticale élevée par le point M coupe l'hyperboloïde en deux points; d'où il suit qu'à la projection horizontale M correspondent deux points m, m', en projection verticale (fig. 2). Pour trouver ces derniers points, on mène par le point M la droite AMA', qui touche l'ellipse $PQRS$ au point T; on projete les points T, A, A' (fig. 1) en (fig. 2) t, a ou α, a' ou α', et on joint les points a, t, α', par une droite, et les points a', t, α, par une autre droite. Ces deux droites sont coupées par la verticale Mmm' aux points cherchés m, m'.

On auroit pu mener par le point M une autre tangente BMB' à l'ellipse $PQRS$. En projetant les points T', B, B' (fig. 1) en t', b ou β, b' ou β', et joignant les points $bt'\beta'$, $b't'\beta$, on obtient deux droites qui sont encore coupées par la verticale Mmm' aux mêmes points m, m'. Il résulte de cette construction que le point de l'hyperboloïde dont la projection horizontale est M, a pour projection verticale m ou m'. Le plan tangent en ce point passe par les deux droites de la surface qui se coupent en ce point; d'où il suit que le plan tangent au point M, m, *n* pour trace horizontale la droite AB, et le plan tangent au point M, m', a pour trace la droite $A'B'$.

En considérant la droite M, (fig. 1), mm' (fig. 2), comme une corde de l'hyperboloïde, on voit que des quatre droites de cette surface, menées par les extrémités de la corde, la corde et deux

de ces droites sont dans un même plan. En substituant à la corde M, mm', toute autre corde MN, $m'n'$, la même coïncidence aura lieu. En effet, tout plan qui passe par une corde de l'hyperboloïde et par une droite de cette surface, contient nécessairement une seconde droite, et cette dernière droite coupe la première en un point dans lequel le plan touche la surface.

Pour construire la fig. 1, qui représente les projections de la génératrice de l'hyperboloïde dans les deux systèmes de génération, on peut diviser la demie ellipse XAY d'une manière arbitraire, et mener par chaque point de division deux tangentes à l'ellipse principale $PQRS$. Elles seront les projections de deux droites partant d'un même point de la surface. Mais ces couples de droites étant menées arbitrairement, la demie ellipse $XA'Y$ ne sera pas divisée de la même manière que la première moitié XAY; pour que les deux divisions soient symétriques, M. Monge a observé que les petits arcs d'ellipse $X1$, 12, 34, etc., devoient être les projections d'arcs égaux $X1'$, $1'2'$, $3'4'$, etc. d'un cercle qui auroit pour diamètre la droite XY. C'est d'après cette division du cercle, qu'il faudroit construire les figures 1 et 2, si l'on vouloit exécuter un support de vase, ou une corbeille de la forme de l'hyperboloïde à une nappe.

Nous terminerons cet article par une remarque sur les paraboloïdes. J'ai démontré que les deux paraboloïdes étoient représentées par l'équation :

$$pz^2 \pm p'y^2 - 4pp'x = 0.$$

p et p' étant des paramètres de la surface; en coupant cette surface par un plan quelconque de l'équation

$$ax + by + cz + 1 = 0,$$

qui donne

$$x = -\frac{(1 + by + cz)}{a},$$

et substituant cette valeur dans l'équation précédente, les coefficiens de y^2 et de z^2 ne varient pas; d'où il suit que quel que soit le plan secant, les sections se projètent sur le plan des yz, suivant des courbes semblables, donc de quelque manière qu'un paraboloïde soit situé dans l'espace, *il existe un plan sur lequel toutes les sections planes du paraboloïde se projètent suivant des courbes semblables.*

Sur le Contact des Surfaces engendrées par une ligne droite;

Par M. J. Binet.

Ces surfaces sont très-fréquemment employées dans l'application de la géométrie aux arts. Quand elles ne sont pas développables on les appelle surfaces gauches. Les méthodes dont on se sert pour leur mener des plans tangens, reposent sur le théorème suivant que M. Hachette a donné dans des *Additions à la Géométrie Descriptive* de M. Monge.

Deux surfaces engendrées d'une manière quelconque par une ligne droite, qui ont une génératrice commune, et en trois points de cette génératrice trois plans tangens communs, sont tangentes l'une à l'autre dans tous les points de cette génératrice.

Par les trois points déterminés a, b, c sur une génératrice d'une telle surface, concevons trois courbes quelconques A, B, C, tracées sur cette même surface, et pouvant être considérées comme les trois directrices du mouvement de la génératrice; désignons par a', b', c' les trois points où ces courbes sont rencontrées par une autre génératrice à distance de la première. Imaginons une courbe quelconque A', passant par les points a et a'; une autre courbe quelconque B' passant par les points b et b'; une troisième courbe C' passant par les points c et c'; et regardons les courbes A', B', C', comme servant de directrices au mouvement d'une ligne droite, qui alors engendrera une surface, rencontrant la première suivant les deux lignes droites abc, et $a'b'c'$. Que l'on conduise un plan qui rencontre la ligne abc en un point d, la ligne $a'b'c'$, en un point d'; il coupera la première surface suivant une courbe D et la deuxième suivant une autre courbe D', et ces deux courbes D et D' auront les deux points d et d' communs. Tout cela posé, si l'on conçoit que la droite $a'b'c'$ se meuve sur la première surface, de manière à se rapprocher indéfiniment de la droite $a\ b\ c$, les points a', b', c', d' se mouveront respectivement sur les courbes A, B, C, D, de manière à se rapprocher indéfiniment aussi des points a, b, c, d; en sorte que lorsque la ligne $a'\ b'\ c'$, atteignant la limite des positions qu'elle doit prendre, se confondra avec $a\ b\ c$, les courbes A', B', C', D' deviendront ensemble tangentes en a, b, c, d, aux courbes A, B, C, D. La surface engendrée par la droite s'appuyant sur les courbes A', B', C', devenues tangentes aux courbes A, B, C, sera tangente à la première surface, dans toute l'étendue de la droite

a b c, puisque ces deux surfaces étant coupées par un plan passant par un point quelconque *d* de cette droite, fournissent des courbes tangentes en ce point.

Il résulte de là, que si aux trois points *a*, *b*, *c*, on mène trois courbes quelconques *A'*, *B'*, *C'*, respectivement tangentes en ces points aux courbes *A*, *B*, *C*, et qu'on les employe comme directrices du mouvement d'une ligne droite, la surface engendrée par cette droite sera tangente à la surface proposée dans toute l'étendue de la droite *a b c*.

Pour démontrer le théorême qui fait l'objet de cette note, il suffit d'observer que par les trois points où les deux surfaces ont leurs plans tangens communs, il est possible de tracer sur ces surfaces des courbes respectivement tangentes et pouvant être considérées comme directrices des droites génératrices des surfaces proposées; et ces surfaces, par suite de ce que nous venons d'établir, seront tangentes l'une à l'autre dans toute l'étendue de leur génératrice commune.

On prouve d'une manière semblable, que deux surfaces engendrées par une ligne droite assujettie à rester constamment parallèle à un plan, sont tangentes dans toute l'étendue de cette génératrice, si en deux des points de cette droite, ces surfaces ont des plans tangens communs.

De la Pyramide Triangulaire ;

Par M. Hachette.

J'ai donné dans le Supplément de la Géométrie Descriptive, art. 131, une solution de ce problême : connoissant dans une pyramide triangulaire, la base et les angles des faces opposés aux côtés de la base, construire le sommet de cette pyramide. En appliquant l'analyse à cette solution, on démontre rigoureusement que ce problême a dans le cas général seize solutions.

Soient (planche *B*) *XYZ*, fig. 1, la base de la pyramide donnée; *XFZf*, *ZOYo*, *XGYg*, les cercles générateurs des trois surfaces de révolution qui par leur intersection déterminent le sommet de la pyramide. Les deux premières surfaces qui ont pour axes les droites *XZ*, *ZY*, se coupent suivant une ligne composée de deux branches, l'une qui résulte de l'intersection des nappes de surfaces engendrées par les grands segmens *XFZ* et *ZOY*, et des nappes de surfaces engendrées par les

petits segmens XfZ, ZoY; l'autre, qui résulte de l'intersection des nappes engendrées par un grand segment XFZ, et un petit segment ZoY, ou par un grand segment ZOY et un petit segment XfZ.

La première branche, en tournant autour de l'axe XY, engendre une nappe de la quatrième surface de révolution, dont la section par le plan du triangle XYZ, est $ZACB$. La section de la seconde nappe par le même plan, est $ZA'C'B'$; ces deux sections ont pour normale commune l'axe XY, qui divise chacune d'elles en deux parties égales; elles sont coupées par les deux cercles $XGYg$, et $XG'Yg'$, en seize points, dont huit marqués des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, appartiennent à la courbe $ZABC$. Les huit autres points marqués des mêmes chiffres accentués, appartiennent à la courbe $ZA'B'C'$. Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, mis deux à deux dans l'ordre suivant, 1 — 8, 2 — 7, 3 — 6, 4 — 5, sont à égales distances de l'axe XY, et sur deux droites perpendiculaires à cet axe. Il en est de même des points 1', 2', 3', 4', par rapport aux points 8', 7', 6', 5'.

D'où il suit que les sommets des pyramides cherchées sont situés sur huit cercles du diamètre 1 — 8, 2 — 7, 3 — 6, 4 — 5, 1' — 8', 2' — 7', 3' — 6', 4' — 5'. Ces cercles appartiennent à la troisième surface de révolution, dont l'axe est XY, et qui a pour génératrice les axes XGY, XgY. Chacun de ces cercles contient deux sommets des pyramides cherchées. En effet, considérons celui dont le diamètre est 1 — 8, et qui a pour centre un point de l'axe XY. Le point 8 de la courbe $ZACB$ provient de l'intersection de deux cercles décrits par deux points des grands segmens ZOY, ZFX; donc, si l'on porte la droite $Y8$ sur Ya, corde de l'arc ZOY, et la droite Za sur Za', corde de l'arc ZFX, ou la droite $X8$ sur la corde Xa' du même arc ZFX, les droites Ya, Za, $=$ Za' et Xa', seront les trois arêtes d'une des pyramides cherchées. Abaissant la perpendiculaire $a\alpha$ sur l'axe ZY, et la perpendiculaire $a'\alpha$, sur l'axe XZ, ces deux perpendiculaires se rencontrent en un point α du diamètre 1 — 8, qui est la projection du sommet de la pyramide sur le plan de la base XYZ. Le même point α est la projection du sommet d'une seconde pyramide, symétrique par rapport à la première.

Le cercle du diamètre 1 — 8 contient les sommets de deux pyramides; ces sommets se projetent en α sur le plan horizontal du triangle XYZ, et en α, (α), sur le plan vertical vv' (fig. 2), perpendiculaire à l'axe XY. Les quatre projections horizontales α, β, γ, δ, des sommets de pyramides qui correspondent à la courbe $ZABC$, forment un quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, dont la

projection verticale (fig. 2) est le système des deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, et (α) (β) (γ) (δ). Les quatre projections horizontales α', β', γ', δ', des sommets de pyramides qui correspondent à la courbe $ZA'B'C'$, forment un quadrilatère $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, dont la projection verticale (fig. 2) est le système de deux quadrilatères $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, et (α') (β') (γ') (δ').

Cette solution fait voir que les pyramides qui ont pour bases le triangle XYZ, et pour angles opposés aux côtés de cette base, les angles déterminés par les arcs XFZ, ZOY, YGX, et leurs supplémens, sont au nombre de seize; nous allons démontrer que ce nombre de solutions est le plus grand possible.

M. Lagrange a appliqué la méthode des *Courbes d'Erreurs* à la solution de cette même question, relative à la pyramide triangulaire. (*Voyez* ses leçons à l'ancienne Ecole Normale, qu'on vient de réimprimer pour en former les cahiers 7 et 8 du Journal de l'Ecole Polytechnique.) Nommant a, b, c les trois côtés de la base; α, β, γ les cosinus des angles des faces opposés aux côtés; x, y, z les trois arêtes, on a les trois équations suivantes :

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha xy.$$
$$b^2 = y^2 + z^2 - 2\beta yz.$$
$$c^2 = z^2 + x^2 - 2\gamma xz.$$

M. Lagrange observe qu'en faisant $\frac{y}{x} = u$, $\frac{z}{x} = t$, ces trois équations deviennent,

$$a^2 = x^2(1 + u^2 - 2\alpha u).$$
$$b^2 = x^2(u^2 + t^2 - 2\beta ut).$$
$$c^2 = x^2(1 + t^2 - 2\gamma t).$$

De ces trois équations on déduit les deux suivantes du second degré en u et t;

$$(E).\begin{cases} a^2(1 + t^2 - 2\gamma t) = c^2(1 + u^2 - 2\alpha u). \\ b^2(1 + t^2 - 2\gamma t) = c^2(u^2 + t^2 - 2\beta ut). \end{cases}$$

L'élimination de u ou de t entre ces deux équations, conduit à une équation du quatrième degré en u ou t. Substituant les quatre valeurs de u dans l'équation

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + u^2 - 2\alpha u}},$$

on aura les quatre valeurs de x correspondantes, et à cause de la double valeur du cosinus α, qui peut être pris positivement ou négativement, l'arête x a huit valeurs différentes. Les huit valeurs correspondantes de l'arète y sont données par l'équation $y = xu$. Mais par l'élimination de t^2 entre les équations (E), on obtient une équation linéaire en t, qui détermine les quatre valeurs de t qui correspondent aux quatre valeurs de u et aux huit valeurs de x; combinant les valeurs de x et de t qui se correspondent, l'équation $z = xt$, donnera les huit valeurs de z qui correspondent aux huit valeurs de x. De cette manière on déterminera les huit systèmes d'arêtes x, y, z, qui forment la pyramide dont la base triangulaire a pour côtés les droites a, b, c, et dont les angles compris entre les arêtes ont pour cosinus $\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma$.

Aux huit pyramides qui ont pour arêtes les droites x, y, z, on doit en ajouter huit autres qui leur sont symétriques. Ces dernières ont même base que les premières, mêmes arêtes, mêmes angles opposés aux côtés de la base; elles n'en diffèrent que par la position des sommets. Les sommets d'une pyramide et de celle qui lui est symétrique, sont placés à des distances égales et opposées du plan de la base.

En appliquant l'analyse à la solution géométrique précédente, on arrive aux mêmes conclusions.

Soient a, b, $2c$, les trois côtés XZ, ZY, YX, de la base XYZ (fig. 1), p et q les cosinus des angles opposés aux côtés a et b, et l, m, n, les trois arêtes de la pyramide. Prenant pour origine des coordonnées le milieu de la droite XY, chaque point de la courbe $ZABC$, $ZA'B'C'$, résulte de l'intersection de deux cercles décrits des points X et Y comme centres, avec des rayons égaux aux arêtes l et m, qui passent par les points X et Y de la base; ces cercles ont pour équations,

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & (x-c)^2+y^2=l^2 \\ (2) & (x+c)^2+y^2=m^2\end{array}\right\} l^2-m^2=-4cx.$$

Les arêtes l et n comprennent entr'elles l'angle dont le cosinus est p; les arètes m et n comprennent l'angle dont le cosinus est q; d'où il suit qu'on aura les équations suivantes

$$(3) \qquad a^2 = l^2 + n^2 - 2lnp.$$

$$(4) \qquad b^2 = m^2 + n^2 - 2mnq.$$

Éliminant de ces quatre équations l, m, n, l'équation finale en x, y, appartient à la courbe $ZABC$, $ZA'B'C'$.

Retranchant l'équation (4) de l'équation (3), on a

$$a^2 - b^2 = l^2 - m^2 - 2n(lp - mq);$$

$$n = \frac{l^2 - m^2 + b^2 - a^2}{2(lp - mq)}$$

Substituant cette valeur de n dans l'équation (4),

$$(5) \qquad b^2 = m^2 + \frac{(l^2 - m^2 + b^2 - a^2)^2}{4(lp - mq)^2} - \frac{mq(l^2 - m^2 + b^2 - a^2}{lp - mq}$$

mettant dans cette équation pour l, m, l^2, m^2, $l^2 - m^2$, leurs valeurs données par les équations (1), (2), on parvient à l'équation suivante,

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2(y^2 + (x-c)^2)(b^2 - y^2 - (x+c)^2 + q^2(y^2 + (x+c)^2(a^2 - y^2 - (x-c)^2)) \\ -(b^2 - a^2 - 4cx)^2 \end{array} \right\}^2$$
$$= 4p^2q^2\left(\frac{a^2+b^2}{2} - (x^2+y^2+c^2)\right)(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2)$$

du huitième degré en x, y, et les constantes a, b, c, p, q; cette équation est remarquable en ce que dans les termes qui contiennent p et q, les exposans de ces quantités sont pairs, et élevés seulement à la seconde puissance. D'où il suit que cette équation ne varie pas, quel que soit le signe de ces cosinus. La courbe de cette équation est coupée par le cercle capable de l'angle opposé au côté $2c$, et qui a pour équation

$$(6) \qquad x^2 + (y + h)^2 = r^2, \text{ ou } x^2 + y^2 = r^2 + h^2 - 2hy.$$

Or, en substituant cette valeur de $x^2 + y^2$ dans l'équation de la courbe du huitième degré, cette équation se réduit au quatrième degré; d'où il suit que le cercle de l'équation (6) ne peut couper la courbe $ZABC$, $ZA'B'C'$, qu'en huit points. Mais le cercle capable de l'angle opposé au côté $2c$, peut prendre deux positions XGY, $XG'Y$ symétriques par rapport à l'axe XY (fig. 1); et dans la seconde position, il a pour équation

$$(7) \qquad x^2 + (y - h)^2 = r^2;$$

($h = \sqrt{r^2 - c^2}$, et r est une constante qui dépend de l'angle

pposé au côté $2c$); d'où il suit que les deux cercles des équations (6) et (7), coupent la courbe aux deux branches $ZABC$, $ZA'B'C'$ en seize points, qui correspondent à seize sommets de pyramides; les projections de ces sommets sur le plan du triangle XYZ, se réduisent aux huit points α, β, γ, δ, α', β', γ', δ'.

Des seize sommets, huit sont placés au-dessus du plan du triangle XYZ, et se projètent (fig. 2) en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$: les huit autres se projètent (fig. 2) au-dessous de l'horizontale vv', et sont marqués des mêmes lettres en parenthèse : les points marqués des mêmes lettres sont situés sur une droite perpendiculaire à la trace vv' des plans horizontal et vertical.

De la Sphère.

Par M. Hachette.

J'ai réuni dans le *Supplément de la Géométrie Descriptive* de Monge, les propositions relatives à la sphère, qui sont depuis long-temps l'objet de nos leçons sur les plans tangens aux surfaces courbes. On connoissoit la solution de cette question, « Mener une sphère tangente à quatre sphères. » Elle n'est pas très-importante par elle-même; mais la solution que j'en ai donnée m'a paru convenir à un ouvrage classique de *Géométrie Descriptive*, parce qu'elle offre de nouvelles combinaisons de plans et de sphères. Pour traiter cette question, on pouvoit, comme Fermat, la ramener à des problêmes de géométrie plane. En suivant cette méthode, nous n'aurions pas rempli notre objet, qui est d'habituer l'esprit à des considérations sur les propriétés de l'étendue; et dans ce sens, la solution qu'on doit préférer, est celle qui présente à l'esprit de nouvelles surfaces, remarquables par un mode simple de génération, ou par quelques propriétés qui conduisent à des constructions graphiques élégantes.

On peut expliquer la solution d'un problême de géométrie à trois dimensions, en désignant les points de l'espace par des lettres; et c'est cette méthode que j'ai suivie dans le *Supplément à la Géométrie Descriptive*, pour déterminer la sphère qui en touche quatre autres; mais lorsqu'une solution doit être suivie d'une construction graphique, il est important que cette solution soit accompagnée d'un dessin qui représente la disposition des données du problême, et les lignes ou les surfaces qu'il s'agit de déterminer. C'est pour remplir cet objet, que

j'ajoute au texte du *Supplément de la Géométrie Descriptive* une explication des planches C et D, qui se rapporte aux articles du Supplément, dont j'indique les numéros.

Les centres et les rayons de quatre sphères étant donnés, soient (planche C) A, B, C les centres des trois premières sphères ; D' la projection du centre D de la quatrième sphère sur le plan des trois centres A, B, C, plan qu'on suppose horizontal. $d\,D''$ est, sur le plan vertical $S\,d$, la hauteur du centre de la quatrième sphère au-dessus du plan horizontal. Le plan mené par le centre D et par les points A et B étant abattu sur le plan horizontal, ce point D est l'intersection de la droite $D'\,D$ perpendiculaire à $A\,B$, et de la parallèle $d'\,D$ à $A\,B$, menée par le point d' distant du point S d'une quantité $S\,d' = S\,D''$.

Les droites qui joignent les quatre centres des sphères forment une pyramide triangulaire à six arêtes ; chaque arête contenant les sommets de deux cônes circonscrits à deux des quatre sphères, il s'ensuit que les cônes extérieurs et intérieurs circonscrits à quatre sphères, sont au nombre de douze. Les sommets de ces douze cônes sont distribués trois à trois sur une même droite.

Nommant A, B, C, D les sphères qui ont leurs centres aux points désignés (Planche C) par les mêmes lettres, les six sommets des cônes extérieurs et intérieurs circonscrits aux trois sphères A, B, C, sont (art. 26 du Supplément) situés sur quatre droites $S\,S'\,S''$, $S\,s'\,s''$, $s\,S'\,s''$, $s\,s'\,S''$; ces lettres S, S', S'' désignant les sommets de cônes extérieurs, et s, s', s'' les sommets de cônes intérieurs. Les six sommets de cônes extérieurs et intérieurs, circonscrits aux trois sphères A, B, D, sont situés sur les quatre droites $S\,R'\,R''$, $S\,r'\,r''$, $s\,R'\,r''$, $s\,r'\,R''$; enfin, nommant Q', q'', les sommets des cônes extérieur et intérieur, circonscrits aux deux sphères C et D, les six sommets des cônes extérieurs et intérieurs, circonscrits aux trois sphères A, B, D,, seroient situés sur quatre autres droites

$$S''\,R''\,Q'',\quad S''\,r''\,q'',\quad s''\,R''\,q'',\quad s''\,r''\,Q''.$$

Ces douze droites sont situées trois à trois dans quatre plans qui passent par trois droites arrangées dans l'ordre suivant :

1er. Plan. — $S\,S'\,S''$, $S\,R'\,R''$, $S''\,R''\,Q''$.
2e. Plan. $S\,s'\,s''$, $S\,r'\,r''$, $S''\,r''\,q''$.
3e. Plan. $s\,S'\,s''$, $s\,R'\,r''$, $s''\,R''\,q''$.
4e. Plan. $s\,s'\,S''$, $s\,r'\,R''$, $s''\,r''\,Q''$.

Les quatre petits cercles, lieux des points de contact de la sphère A (c'est-à-dire dont le centre est en A), sont perpendiculaires au plan des trois centres A, B, C, et ont pour diamètres les droites (art. 39 du Supplément),

$$A^e\,B^e\,C^e,\quad A^e\,B^e\,C^i,\quad A^e\,B^i\,C^e,\quad A^e\,B^i\,C^i,$$

droites qu'on auroit pu désigner sur la figure (Planch. C) de la manière suivante :

$$A^i\,B^i\,C^i,\quad A^i\,B^i\,C^e,\quad A^i\,B^e\,C^i,\quad A^i\,B^e\,C^e.$$

Ces quatre petits cercles sont les bases de cônes droits circonscrits à la sphère A, dont les sommets f, g, h, k, sont situés sur les droites, lieux des sommets des cônes extérieurs et intérieurs, circonscrits aux trois sphères A, B, C; de sorte que

Le point f est sur la droite	$S\,S'\,S''$.
Le point g sur la droite	$S\,s'\,s''$.
Le point h sur la droite	$s\,S'\,s''$.
Le point k sur la droite	$s\,s'\,S''$.

Considérant le systême des trois sphères A, B, D (1), les points analogues à f, g, h, k, sont f', g', h', k', situés sur les droites $S\,R'\,R''$, $S\,r'\,r''$, $s\,R'\,r''$, $s\,r'\,R''$. Ces quatre points f', g', h', k', sont les sommets de cônes droits circonscrits à la sphère A, qui touchent cette sphère suivant les cercles des diamètres :

$$A^e\,B^e\,D^e,\quad A^e\,B^e\,D^i,\quad A^e\,B^i\,D^e,\quad A^e\,B^i\,D^i.$$

Un quelconque de ces quatre petits cercles coupe en quatre points deux des quatre petits cercles qui ont pour diamètres les droites

$$A^e\,B^e\,C^e,\quad A^e\,B^e\,C^i,\quad A^e\,B^i\,C^e,\quad A^e\,B^i\,C^i,$$

ce qui détermine les points de contact de la sphère A et de la cinquième sphère, qui touche les quatre sphères A, B, C, D.

---

(1) Les lignes relatives au systême des trois sphères A, B, C, sont ponctuées sur le dessin en points ronds; et celles qui sont relatives au systême des trois sphères A, B, D, sont ponctuées d'un trait long.

Le cercle du diamètre $A^e\ B \cdot C^e$ est coupé par les deux cercles des diamètres $A^e B^e D^e$, $A^e B^e D^i$, en quatre points qui se projètent sur le plan des trois centres A, B, C, aux points 1, 2, 3, 4. Nous allons construire sur une figure à part (Pl. D) les quatre points 1, 2, 3, 4, et on trouvera de la même manière les douze autres points.

D'après ce qui a été dit (art. 39 du Supplément), on a :

Cercle du diamètre $A^eB^eC^e$, coupé par les cercles des diamètres		$A^eB^eD^e, A^eB^eD^i$
Cercle du diamètre $A^eB^eC^i$,	*idem.*	*idem.*
Cercle du diamètre $A^eB^iC^e$,	*idem.*	$A^eB^iD^e, A^eB^iD^i$
Cercle du diamètre $A^eB^iC^i$,	*idem.*	*idem.*

Dans la figure (Planche D), nous ne considérerons que les points d'intersection du cercle dont le diamètre est $A^eB^eC^e$ et des cercles qui ont pour diamètres les droites $A^eB^eD^e$, $A^eB^eD^i$. Des douze droites lieux des sommets des cônes droits circonscrits aux quatre sphères données, nous ne rapporterons sur cette figure que les trois droites $S\,S'\,S''$, $S\,R'\,R''$, $S\,r'\,r''$; et les trois sommets f, f', g' des trois cônes droits circonscrits à la sphère A, qui ont pour bases les diamètres

$$A^e\ B^e\ C^e,\ A^e\ B^e\ D^e,\quad A^e\ B^e\ D^i.$$

Nommant r, r', r'', r''', les rayons des quatre sphères données, R le rayon de la sphère tangente, $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$, les distances du centre de la sphère tangente aux centres des sphères données, on a les quatre équations, (*Correspondance*, tom. 2, pag. 63)

$$R \mp r = \rho,\ R \mp r' = \rho',\ R \mp r'' = \rho'',\ R \mp r''' = \rho''',$$

qui fournissent seize combinaisons ; ce qui prouve qu'en général il y a seize sphères qui peuvent toucher quatre sphères données.

En effet la première équation donne :

$$R - r = \rho.$$

Les deux équations suivantes donnent quatre combinaisons et pour chacune de ces combinaisons, on a :

$$\text{ou } R - r''' = \rho''',\ \text{ou } R + r''' = \rho''';$$

ce qui élève le nombre de combinaisons possibles à huit. On a par la même raison huit combinaisons, lorsqu'on suppose dans

a première équation $R + r = \rho$; d'où il suit que quatre sphères lonnées peuvent être touchées par une cinquième sphère de eize manières différentes.

Des seize sphères tangentes, cherchons celle dont le rayon $R = \rho + r = \rho' + r' = \rho'' + r'' = \rho''' + r'''$, c'est-à-dire, celle qui touche intérieurement les quatre sphères données. La construction qui détermine le centre de cette sphère, donne en même emps le centre et le rayon de la sphère qui touche intérieurement les quatre sphères données.

Ayant augmenté les rayons des trois sphères A, B, C, d'une uantité TT' (pl. D) prise arbitrairement, on regardera les points A, B, C, comme les centres de trois nouvelles sphères qui se couperont en un point, centre d'une sphère T, tangente aux phères A, B, C; par le point de contact de cette sphère T, t de la sphère A, on mènera un plan tangent à cette dernière phère, et ce plan coupera la droite $S\,S'\,S''$ au point f, sommet u cône droit circonscrit à la sphère A, et qui la touche suiant le cercle du diamètre $A^e\,B^e\,C^e$. Ce cercle contient les points e contact de la sphère A et de toutes les sphères qui peuvent oucher les trois sphères A, B, C extérieurement.

Considérant les trois sphères A, B, D, on construira de la même manière un second cercle du diamètre $A^e\,B^e\,D^c$, qui contient les points de contact de la sphère A et de toutes les phères qui peuvent toucher les trois sphères A, B, D extérieurement. L'intersection de ces deux petits cercles de la phère A détermine sur cette sphère le point de contact d'une inquième sphère, qui la touche en même temps que les trois utres sphères B, C, D.

Les deux petits cercles des diamètres $A^e B^e C^e$, $A^e B^e D^c$, se couant en deux points, dont les projections sur le plan des trois entres A, B, C, sont 1 et 2; le second point appartient à la phère qui touche les quatre sphères données intérieurement. Si es points 1 et 2, on abaisse des perpendiculaires sur la droite AB, es points d'intersection 1′, 2′ de ces perpendiculaires et du diaètre $A^e\,B^e\,D^c$, sont les projections des points communs aux eux petits cercles de la sphère A, sur le plan des trois centres A, B, D.

Toutes les sphères qui touchent les sphères A et B extérieurement, et la sphère D intérieurement, touchent la sphère A, uivant un cercle du diamètre $A^e\,B^e\,D^i$. Pour déterminer ce iamètre, nommons r, r', r'' les rayons des sphères A, B, D, t supposons qu'on ait augmenté les rayons r, r' d'une quantité rbitraire TT' (pl. D); regardant les points A, B, D comme les entres de trois sphères qui ont pour rayons, la première $r + T'T$,

la seconde, $r' + TT'$ et la troisième, $TT' - r''$; ces trois sphères se couperont en un point centre d'une sphère T' du rayon TT', qui touchera les sphères A et B extérieurement, et la sphère D intérieurement. Cette sphère T' touchera la sphère A en un point; si par ce point on mène un plan tangent à la sphère A, ce plan coupera la droite $S\,r'\,r''$ en un point g', sommet du cône circonscrit à la sphère A, et qui touche cette sphère suivant le petit cercle du diamètre $A^i B^i D^i$. Le plan de ce petit cercle perpendiculaire à celui des trois centres A, B, D, coupe le petit cercle du diamètre $A^e B^e D^e$, en deux points qui se projètent en 3 et 4 sur le plan des trois centres A, B, C et en $3'$, $4'$ sur le plan des trois centres A,B,D.

En raisonnant de la même manière, on verra (Planche C) que la sphère A est touchée par un cône droit, qui a son sommet en g sur la droite $S\,s'\,s''$, et par deux autres cônes droits qui ont leurs sommets, l'un en f' sur la droite $S\,R'\,R''$, l'autre en g' sur la droite $S\,r'\,r''$, et dont les bases sont des cercles des diamètres $A^e B^e D^e$, $A^i B^i D^i$. Le cercle de contact de la sphère A et du premier cône, et les cercles de contact de la même sphère A et des deux autres cônes, se coupent en quatre points, qui se projètent sur le plan des trois centres A,B,C, suivant le diamètre $A^e\ B^e\ C^i$. Par deux de ces quatre points de la sphère A, il faut concevoir deux sphères, dont l'une touche les sphères A, B, D extérieurement, et la sphère C intérieurement, et dont l'autre touche les sphères A, B, D intérieurement, et la sphère C extérieurement. Par les deux autres points de la sphère A, qui se projètent sur le diamètre $A^i B^i C^e$, on peut mener deux sphères telles que la première touchant les sphères A et B extérieurement, et les sphères C et D intérieurement, la seconde touche les sphères A et B intérieurement, et les sphères C et D extérieurement.

Ayant déterminé le centre de la sphère qu'on a désignée (page précédente) par la lettre T, le plan mené par le centre perpendiculairement à la droite $SS'S''$, contient (*art.* 34 *du Suppl.*) les centres de toutes les sphères qui peuvent toucher à-la-fois les trois sphères A, B, C extérieurement ou intérieurement, et par conséquent le centre de la sphère comprise dans cette série qui touche les quatre sphères A, B, C, D. Or, on a déterminé le point de contact de cette sphère et de la sphère A; donc le rayon de la sphère A qui passe par ce point de contact, coupe le plan des centres perpendiculaire à la droite $SS'S''$, en un point centre de l'une des seize sphères, qui peuvent toucher les quatre sphères données A,B,C,D. D'ailleurs, connoissant le point de contact de l'une des seize sphères tangentes et de la sphère A, il est très-facile de le trouver sur les sphères

B, C, D, en se rappelant cette proposition, démontrée *art.* 29 *du Supplément*, que lorsqu'une sphère touche trois sphères données A, B, C, les droites menées par les points de contact, passent par l'un des sommets des cônes intérieurs ou extérieurs, circonscrits aux sphères données.

Si des quatre sphères données A, B, C, D une quelconque, (C par exemple), embrassoit les trois autres, auquel cas on n'auroit pas les sommets des cônes circonscrits à la sphère C et aux trois sphères A, B, D, alors on détermineroit sur la sphère A, un cercle du diamètre tel que $A^e B^e C^i$, en considérant deux sphères de rayons quelconque, qui toucheroient extérieurement les deux sphères A et B, et intérieurement la sphère C, et on construiroit les points de contact de ces sphères et de la sphère A; la projection de ces deux points de contact sur le plan des trois centres A, B, C, appartiendroit au diamètre $A^e B^e C^i$.

Observations Barométriques correspondantes faites en octobre 1811, *à l'Aqueduc de Marly, et dans la plaine du Vesinet.*

Par M. Puissant.

Les observations suivantes ont été faites avec deux excellens baromètres de mêmes dimensions, construits par Fortin, et que M. Hachette avoit eu la bonté de me prêter. La première expérience a été faite le 13 octobre 1811; M. Hachette observoit à la station supérieure. Les jours suivans, deux de mes amis ont bien voulu m'aider à continuer ce travail. Les observations des stations supérieure et inférieure ont toujours été faites aux mêmes heures.

Nous avons eu soin de comparer entr'eux les deux baromètres, à diverses reprises et à différentes hauteurs; ce qui nous a fait connoître la nécessité d'augmenter de $0^m,0004$ toutes les hauteurs fournies par le baromètre désigné par E dans le tableau (pag. 345), quantité dont la colonne de mercure qu'il renfermoit, se tenoit plus basse que celle contenue dans l'autre baromètre A.

Les quatre thermomètres ont été comparés de même, et trouvés parfaitement d'accord à différentes températures.

Pendant les observations, les thermomètres libres ont été élevés au-dessus du sol autant qu'il a été possible, et préservés de

l'action des rayons directs et réfléchis du soleil. Les mêmes précautions ont été prises relativement aux thermomètres et aux cuvettes des baromètres.

Tous les nombres qui sont insérés dans le tableau sont des *moyennes arithmétiques* résultantes de trois lectures successives faites à des instans convenus.

Avant d'observer les hauteurs des baromètres, on lisoit les degrés de leurs thermomètres.

Un nivellement trigonométrique, fait avec toute l'exactitude que l'on peut désirer, et qui porte avec lui sa vérification, a donné pour la différence de niveau cherché 145,5 mètres.

Malgré ces précautions, ainsi que d'autres dont il est inutile de parler, nous n'avons pu nous procurer des observations qui fussent parfaitement exemptes d'anomalies. Les seules qui paroissent réunir assez bien les conditions requises, sont les observations des 19 et 23 octobre, parce que la marche des instrumens étoit alors plus régulière, et que les variations de densité de l'air se manifestoient dans le même sens aux deux stations, tandis que le contraire avoit eu lieu le 14 et le 15 du même mois. Ainsi, la différence de niveau, déterminée par les baromètres, et conclue des quatre meilleures observations, ne différe que de $1^{m},6$ de celle obtenue par la mesure trigonométrique.

M. Ramond, qui a discuté les cas les plus favorables à ce genre d'observations, et qui a établi des règles certaines pour les reconnoître, s'est convaincu, par un bien plus grand nombre d'expériences, de l'exactitude de la formule de M. Laplace, pour des hauteurs aussi petites que celles dont il s'agit ici. Voici ce que M. Ramond m'écrivit le 30 janvier dernier, en réponse à ce que je lui avais marqué relativement au peu de succès de nos premières observations barométriques.

« J'ai le plaisir de me trouver entièrement de votre opinion
» sur la cause principale des erreurs que vous présentent vos ob-
» servations barométriques de Marly. Les erreurs du baromètre
» et celles que la réfraction occasionnent ont la même origine,
» savoir l'intercalation ou la juxta-position de couches d'air
» qui sont hors du rang que leur assigneroit leur densité. Or
» les causes qui troublent la régularité du décroissement
» sont beaucoup plus fréquentes et plus énergiques à la sur-
» face de la terre, et quand les deux stations du baromètre
» se trouvent au niveau de grandes plaines, les indications de
» cet instrument en sont souvent tellement altérés que la loi
» qui sert de base à nos formules, cesse de leur devenir appl[icable]

» cable. C'est ce que j'ai essayé de prouver dans mon second » mémoire par des raisonnemens et des exemples.

» Mais ce n'est la faute ni de la formule ni du coefficient ; et » la preuve en est, que l'on mesure les plus petites hauteurs » sans difficulté et avec la plus grande exactitude, quand les » deux barometres sont placés sur des points isolés et élevés » au-dessus du niveau des plaines. On en acquiert facilement » la preuve, sans même avoir recours aux vérifications géomé- » triques : il ne s'agit pour cela que de faire l'expérience des » trois baromètres, que j'ai rapportée et que j'ai recommandée » à la page 226 de mon Instruction. Quelle que petite que soit » la différence de niveau entre la station moyenne et la station » supérieure, elle se trouve toujours exactement mesurée par » la formule et le coefficient (pourvu que les stations soient » favorables), puisque toujours cette différence de niveau se » trouve la même, soit qu'on la déduise de la hauteur de la » station moyenne et de la station supérieure au-dessus de la » station inférieure, soit qu'on l'ait conclue directement des » observations des deux stations supérieures.

» Au reste, j'ai souvent mesuré, même en plaine, de très- » petites hauteurs, comme de cent, de cinquante, de dix mètres, » et j'ai réussi dans ces mesures. Mais il faut choisir des temps » propices, au nombre desquels je place sur-tout l'absence du » soleil, et il faut user de précautions très-scrupuleuses tant » pour s'assurer de la concordance des baromètres que pour » démêler la véritable température de l'air, etc. »

DATES des ERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre (1).	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom	Trigon.
13 octobre, 3 h. ¼	Stat. inf. $0^m,7567$ E Stat. sup. $0,7432$ A	Centig. 18°,3 18°...	Centig. 18°,5 17 .33	Vent N. O. léger, très-beau temps.	$152^m,7$	$147^m,5$

Hauteur de la cuvette au-dessus de la plate-forme.... $0^m,607$.
idem......... au-dessus de la plaine......... $0,450$.

La comparaison des températures aux stations supérieure et inférieure, présente des lités assez considérables. On voit que le 14 octobre il y a une différence d'environ 2°,7 ; , elle est de 3°, 2, et le plus souvent elle s'élève à peine à 1°. Il est évident que ces iné- ne dépendent pas seulement de la différence des hauteurs des stations supérieure et ieure ; le vent qui règne à la surface de la terre produit un mélange des couches d'air, et seulement dans une atmosphère calme qu'on peut admettre une relation constante les élévations des couches d'air et leurs températures. Saussure évalue la diminution de érature à 0°,55 par chaque élévation d'environ 88 mètres Gay-Lussac a trouvé qu'à une tion de 7016 mètres au-dessus du niveau des mers, correspondoit une différence de tem- ure de 40 degrés (la température à la surface de la terre étant 30°, 7). *H. C.*

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	Trig.
		Centig.	Centig.			
Le 14 à 12 h. ¼	Stat. inf. 0m,7554 E Stat. sup. 0 ,7422 A	20°,5 20 ,3	20°. 20,7	Vent S. O. agitant un peu le mercure. Soleil pâle.	153m,5	
à 1 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7555 E Stat. sup. 0 ,7419 A	23 20 ,3	22,5 20,5	Un peu plus de Soleil.	154 ,7	

Hauteur de la surface du mercure de la cuvette au-dessus de la plate-forme. 1m,085, st.
idem.............................. au-dessus de la plaine...... 0 ,607, st.

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	Trig.
Le 15 à 11 h. 25′	Stat. inf. 0m,7541 E Stat. sup. 0 ,7404 A	23°,0 19 ,8	22°,75 20 ,1	Vent S. très-faible.	155m,3	
à 12 h. 25′	Stat. inf. 0 ,75399 E Stat. sup. 0 ,7405 A	24 ,15 22 ,0	24 ,1 23 ,0	Beau temps.	155 ,0	

Les deux baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	Trig.
Le 16 à 10 h. ¼	Stat. inf. 0m,7535 E Stat. sup. 0 ,7400 A	23°,33 20 ,42	22 ,5 20 ,3	Soleil. Beau temps.	153 ,5	
à 11 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7537 E Stat. sup. 0 ,7401 A	23 ,0 22 ,35	23 ,5 22 ,3	Pas de vent.	157 ,0	

Les deux baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	Trig.
Le 18 à 2 h. ¼	Stat. inf. 0m,7609 A Stat. sup. 0 ,74785 E	25°,5 22 ,8	26 ,25 26 ,5	Très-beau temps, mais un peu de vapeurs à l'horizon.	152m,7	
à 3 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7606 A Stat. sup. 0 ,74737 E	26 ,0 23 ,55	25 ,9 25 ,0	Soleil. Point de vent.	152 ,95	

Hauteur de la cuvette du baromètre E au-dessus de la plate-forme... 0m,450.
idem........................ A au-dessus de la plaine........ 0 ,607.

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	Trig.
Le 19 à 2 h. ¼	Stat. inf. 0 ,76128 A Stat. sup. 0 ,7482 E	24 ,0 22 ,25	24 ,6 23 ,33	Vent S. O. presque insensible.	149m,3	
à 3 h. ¼	Stat. inf. 0 ,761195 A Stat. sup. 0 ,74817 E	24 ,0 22 ,25	24 ,9 23 ,33	Nuages légers.	148 ,3	

Les baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	Trig.
Le 20 à 8 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7618 E Stat. sup. 0 ,7482 A	14 ,6 13 ,8	15 ,5 14 ,6	Brouillard épais.	150m,6	
à 9 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7616 E Stat. sup. 0 ,74815 A	14 ,8 14 ,1	14 ,9 14 ,5	Temps calme.	149 ,8	

Les baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du THERMOMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	RÉSULTATS Trigon.
23 à 12 h. $\frac{1}{4}$	Stat. inf. 0,74685 A	21°,2	21,2	Beau temps.	150m,6	147,5
	Stat. sup. 0,7337 E	19 ,0	19,6	Vent S.S.O.		
à 1 h. $\frac{1}{4}$	Stat. inf. 0,74675 A	22 ,1	21,8	faible.	148 ,3	
	Stat. sup. 0,7335 E	19 ,2	19,33			

Les baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

DE LA MESURE DES HAUTEURS PAR LE BAROMÈTRE.

Démonstration élémentaire de la formule de M. Laplace.

Par M. PETIT.

Supposons l'atmosphère divisée en une suite de couches horizontales d'une épaisseur très-petite, et représentons les épaisseurs de ces couches par h, h', h''...., ces quantités pouvant être aussi petites qu'on voudra.

Soient g, g', g''...., les intensités de la pesanteur dans chacune de ces couches, intensites que nous regardons comme constantes dans toute l'étendue d'une même couche, et variables d'une couche à l'autre en raison inverse du carré de leurs distances au centre de la terre.

Soient ρ, ρ', ρ''...., les densités respectives de ces différentes couches.

Soit r le rayon de la terre, et x la température de l'atmosphère que nous supposerons constante.

Représentons enfin par P le poids de l'atmosphère jusqu'à la surface de la terre ; par P', ce même poids jusqu'à la surface supérieure de la 1ère couche ; par P'' ce poids jusqu'à la surface superieure de la 2e couche, et ainsi de suite. Les poids de ces differentes couches seront representés par $P-P'$, $P'-P''$, $P''-P'''$, etc. ; on aura donc

$$P-P'=g\rho h.\quad P'-P''=g'\rho' h'.\quad P''-P'''=g''\rho'' h'', \text{ etc.}$$

or on sait qu'en désignant par P la force élastique d'un gaz, par ρ sa densité, et par x sa température, on a

$$P = a\,\rho\,(1+0{,}00375\,x);$$

a étant un coefficient constant pour chaque espèce de gaz, et qui doit être déterminé par l'expérience. Faisant pour abréger $a\ (1 + 0{,}00375\ x) = m$, on aura

$$P = m\rho.\ P' = m\rho'.\ P'' = m\rho'', \text{ etc.}$$

donc,

$$P - P' = gh\frac{P}{m}.\ P' - P'' = g'h'\frac{P'}{m}.\ P'' - P''' = g''h''\frac{P''}{m}, \text{ etc.}$$

partant,

$$P' = P\left(1 - \frac{gh}{m}\right).\ P'' = P'\left(1 - \frac{g'h'}{m}\right).\ P''' = P''\left(1 - \frac{g''h''}{m}\right).$$

Supposons maintenant que les épaisseurs successives h, h', h'', soient telles, que l'on ait $gh = g'h' = g''h''$, etc., on aura $\frac{P'}{P} = \frac{P''}{P'} = \frac{P'''}{P'}$, etc, c'est-à-dire que les forces élastiques de l'air formeront une progression géométrique décroissante dont le rapport sera $1 - \frac{gh}{m}$.

L'intensité de la pesanteur étant réciproque au carré de la distance au centre de la terre, on a

$$\frac{g}{g'} = \frac{(r+h)^2}{r^2}.\ \frac{g'}{g''} = \frac{(r+h+h')^2}{(r+h)^2}.\ \frac{g''}{g'''} = \frac{(r+h+h'+h'')^2}{(r+h+h')^2}$$

par conséquent,

$$\frac{h'}{h} = \frac{(r+h)^2}{r^2}.\ \frac{h''}{h'} = \frac{(r+h+h')^2}{(r+h)^2}.\ \frac{h'''}{h''} = \frac{(r+h+h'+h'')^2}{(r+h+h')^2}$$

Or les quantités h, $(h + h')$, $(h + h' + h'')$, sont nécessairement très-petites par rapport à r; on pourra donc négliger leurs carrés, ce qui réduira les équations précédentes à celles-ci :

$$\frac{h'}{h} = \frac{r^2+2hr}{r^2}.\ \frac{h''}{h'} = \frac{r^2+2r(h+h')}{r^2+2rh}.\ \frac{h'''}{h''} = \frac{r^2+2r(h+h'+h'')}{r^2+2r(h+h')}$$

Effectuant les divisions, et négligeant les termes dans lesquels r entre à une puissance supérieure à la première dans le dénominateur, sans entrer dans le numérateur, on aura

$$h'=h\left(1+\frac{2h}{r}\right);\; h''=h'\left(1+\frac{2(h+h')}{r}\right).\; h'''=h''\left(1+\frac{2(h+h'+h'')}{r}\right).$$

On en conclura encore, en substituant successivement et négligeant toujours les termes dont le numérateur est indépendaut de r, et dont le dénominateur renferme cette même lettre à des puissances supérieures,

$$h+h'=2h\left(1+\frac{h}{r}\right);$$

$$h+h'+h''=3h\left(1+\frac{2h}{r}\right),$$

$$h+h'+h''+h'''=hh\left(1+\frac{3\,h}{r}\right),$$

et en général

$$h+h'+h''\ldots\ldots+h^{(n-1)}=nh\left(1+\frac{(n-1)}{r}\right).$$

Si l'on suppose donc qu'on s'élève successivement dans l'atmosphère à des hauteurs

$$0.\;\; h.\;\; 2h\left(1+\frac{h}{r}\right).\;\; 3\,h\left(1+\frac{2h}{r}\right)\ldots nh\left(1+\frac{(n-1)h}{1}\right)$$

Les forces élastiques de l'air correspondantes à ces différentes hauteurs seront au-dessus de la surface de la terre.

$$P.\; P\left(1-\frac{gh}{m}\right).\, P\left(1-\frac{gh}{m}\right)^2.\;\; P\left(1-\frac{gh}{m}\right)^3.\, P\left(1-\frac{gh}{m}\right)^n$$

en sorte que si l'on fait

$$nh\left(1+\frac{(n-1)h}{r}\right)=H;\;\; \text{et}\; P\left(1-\frac{gh}{m}\right)^n=P';$$

P' sera la force élastique de l'air à la hauteur H au-dessus de la surface de la terre.

Divisons tous les termes de la dernière série par P, on aura la progression géométrique

$$1 \cdot \left(1-\frac{gh}{m}\right) \cdot \left(1-\frac{gh}{m}\right)^2 \ldots \left(1-\frac{gh}{m}\right)^n = \frac{P'}{P}.$$

et comparons-lui la progression arithmétique

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n = \frac{H}{h\left(1-\frac{(n-1)h}{r}\right)}.$$

Chaque terme de cette dernière progression sera évidemment le logarithme du terme correspondant de la première, dans le système dont la base est $\left(1-\frac{gh}{m}\right)$; on aura donc, en désignant ces logarithmes par la lettre L,

$$\frac{H}{h\left(1+\frac{(n-1)h}{r}\right)} = L \cdot \frac{P'}{P} = n.$$

Mais on a

$$nh = \frac{H}{\left(1+\frac{(n-1)h}{r}\right)}$$

Effectuant la division et négligeant toujours les termes que l'on est convenu de supprimer, il viendra

$$nh = H\left(1-\frac{(n-1)h}{r}\right), \qquad \text{d'où} \qquad nh = \frac{H\left(1+\frac{h}{r}\right)}{1+\frac{H}{r}}.$$

Remplaçant n par sa valeur, on aura

$$\frac{H}{1+\frac{H}{r}} = \frac{1}{1+\frac{h}{r}} \cdot hL\left(\frac{P'}{P}\right)$$

Pour transformer le logarithme qui entre dans le second membre de cette équation en logarithme décimal, il faut le diviser par le logarithme décimal de la base $\left(1-\frac{gh}{m}\right)$.

on aura donc, en désignant ces nouveaux logarithmes par la lettre l :

$$\frac{H}{1+\frac{H}{r}} = \frac{\frac{m}{g}}{1+\frac{h}{r}} \cdot \frac{\frac{gh}{m}}{l\left(1-\frac{gh}{m}\right)} \cdot l.\left(\frac{P'}{P}\right) \cdot (a).$$

L'équation à laquelle nous venons de parvenir sera d'autant plus exacte que la quantité h sera plus petite. Elle sera donc tout-à-fait conforme à la véritable constitution de l'atmosphère, si l'on y fait h infiniment petit. Le premier facteur $\frac{\frac{m}{g}}{1+\frac{h}{r}}$ se réduit alors à $\frac{m}{g}$. Le rapport $\frac{\frac{gh}{m}}{l\left(1-\frac{gh}{m}\right)}$ devient $\frac{0}{0}$; mais il est évident qu'à cette limite il ne peut être ni nul ni infini, puisqu'alors la quantité $\frac{H}{1+\frac{H}{r}}$ seroit nulle ou infinie, quelque fut H, ce qui est absurde. De plus, ce rapport doit se réduire à une quantité négative que nous représenterons par $-K$, car le facteur $l\left(\frac{P'}{P}\right)$ est négatif, puisque P' est plus petit que P, et la quantité $\frac{H}{1+\frac{H}{r}}$ est essentiellement positive. On a donc

$$\frac{H}{l+\frac{H}{r}} = \frac{mK}{g}\, l\left(\frac{P}{P'}\right).$$

Supposons maintenant que l'on ait observé les hauteurs barométriques à la surface de la terre et à la hauteur H au-dessus de cette surface. Soient T et T' les températures du mercure aux instans de ces deux observations. (Ces températures sont

indiquées par un thermomètre en contact avec le baromètre). Le mercure se condensant de $\frac{1}{5412}$ pour un degré centigrade de diminution dans la température, il en résulte que si δ est la densité de ce fluide à la température T, c'est-à-dire à la première observation, $\delta\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)$ sera celle qui répond à la température T'; si l'on appelle donc z et z' les hauteurs barométriques observées, on aura

$$\frac{P}{P'}=\frac{gz\delta}{g'z'\delta\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)}.$$

g et g' étant les intensités de la pesanteur à la première et à la seconde station. On a d'ailleurs

$$\frac{g}{g'}=\frac{(r+H)^2}{r^2}=\left(1+\frac{H}{r}\right)^2$$

donc

$$\frac{P}{P'}=\frac{z\left(1+\frac{H}{r}\right)^2}{z'\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)}$$

par conséquent

$$H=\left(1+\frac{H}{r}\right)\left\{l\,\frac{z}{z\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)}+2\,l\left(1+\frac{H}{r}\right)\right\}\frac{mK}{g}.$$

Soient encore t et t' les températures de l'air à la surface de la terre et à la hauteur H (ces températures diffèrent en général des températures T et T'). Nous supposerons $x=\frac{t+t'}{2}$; enfin pour tenir compte de la quantité d'eau en vapeur que l'air contient, il est nécessaire d'augmenter un peu le coefficient 0,00375, et de le porter à $0{,}004=\frac{1}{250}$. En effet, à égalité de température, et sous la pression ordinaire de l'atmosphère, la densité de la vapeur n'est à-peu-près que les $\frac{5}{8}$ de celle de l'air; l'air est donc d'autant plus léger qu'il contient plus de vapeur; or il en contient d'autant plus que la température est plus

élevée : ce qui fait que quand l'air est dilaté par la chaleur, son poids diminue dans un plus grand rapport que son volume n'augmente. Remplaçant donc m par sa valeur, on aura

$$H = \frac{aK}{g}\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right) \times$$

$$\left(l.\frac{z}{z'\left(1+\frac{(T+T')}{5412}\right)} + 2\,l\left(1+\frac{H}{r}\right)\right)\left(1+\frac{H}{r}\right). (a).$$

On déterminera le coefficient $\frac{ak}{g}$ en faisant usage d'une hauteur bien connue par des mesures trigonométriques. On prendra cette hauteur pour la valeur de H et on substituera à la place de t, t' T, T', z, z' leurs valeurs observées; on remplacera r par sa valeur 6366198 mètres. L'équation (a) déterminera alors le coefficient inconnu $\frac{ak}{g}$. En prenant une moyenne entre un grand nombre d'observations faites à la latitude de 50°, on l'a trouvée égale à 18336 mètres. Ce coefficient varie avec la latitude du lieu, à cause de la quantité g qui entre à son dénominateur. Si l'on veut avoir égard à cette variation, on aura

$$\frac{aK}{g} = 18336^{\text{mèt.}}\left(1 + (0{,}002837)\cos 2\,\psi\right)$$

ψ étant la latitude du lieu de l'observation.

Enfin pour résoudre l'équation (a) qui contient l'inconnue dans ses deux membres, il suffit d'observer que la quantité $\frac{H}{r}$ étant nécessairement très-petite, on peut la supposer nulle dans une première approximation. On substituera ensuite cette première valeur de H dans le second membre de l'équation (a), ce qui fournira une seconde valeur de H qui ne différera de la véritable que d'une quantité de l'ordre du carré de $\frac{H}{r}$, c'est-à-dire tout-à-fait négligeable.

OPTIQUE.

Moyens de construire par points les caustiques par réflexion, ou par refraction, dans le cas des surfaces sphériques réfléchissantes ou réfringentes.

J'ai fait voir depuis long-temps l'usage des caustiques, pour

construire par points l'image d'un objet vu par réflexion ou par réfraction, en regardant ces courbes comme les limites des polygones formés par leurs tangentes. M. Petit qui a rédigé avec soin les parties principales de l'optique, tant pour le lycée Bonaparte, que pour les élèves de l'École Polytechnique, a trouvé un moyen facile de construire par points les caustiques dues à une réflexion et à une seule réfraction. Considérant deux rayons incidens infiniment voisins, qui partent d'un point lumineux, il nomme p la partie de ces rayons comprise entre le point lumineux et la surface réfléchissante ou réfringente; il suppose que ces deux rayons d'une longueur p, après s'être réfléchis ou réfractés, se rencontrent en un point; il nomme p' la distance de ce dernier point à la surface réfléchissante ou réfringente, et il trouve une relation entre p et p' telle, que la première de ces quantités étant connue, on puisse en déduire la seconde, en sorte que chaque point de la caustique est déterminé par les deux droites p et p'. *H. C.*

Des Caustiques par réflexion.

Soit (planc. *D*, fig. *a*) P le point lumineux que nous supposerons situé dans la concavité du miroir; PM un rayon incident, et M le rayon réfléchi correspondant; Pm est un rayon incident infiniment voisin du premier, et mr le rayon réfléchi correspondant. Le point P' intersection de ces deux rayons réfléchis consécutifs sera un point de la caustique. Pour en déterminer la position, représentons par p la longueur du rayon incident PM, et par p' celle du rayon réfléchi $P'M$. Faisons de plus MN ou $MC=4$

Si nous égalons la somme des angles du triangle PMC à celle des angles du triangle PmC, nous aurons

$$PMC - PmC = mPM - mCM;$$

or $PMC - PmC$ n'est autre chose que l'accroissement de l'angle d'incidence que nous pouvons représenter par dI; on a donc

$$dI = mPM - mCM.$$

Comparant de même les angles des triangles MCP' et mCP' on aura

$$P'MC - P'mC = mCM - mP'M;$$

or $P'MC - P'mC$ est l'accroissement de l'angle de réflexion que nous représenterons par dR; donc

$$dR = mCM - mP'M.$$

D'ailleurs $dI = dR$; donc

$$mPM - mCM = mCM - mP'M,$$
$$MPM + mP'M = 2\,mCM.$$

Remplaçant chaque angle par l'arc qui le mesure, on aura

$$\frac{Mm + Nn}{2} + \frac{Mm + Rr}{2} = 2\,Mm.$$

Réduisant $Nn + Rr = 2\,Mm$;

or, les trois arcs Mm, Nn, Rr étant infiniment petits, on a

$$Nn = Mm.\frac{4a - p}{p}, \text{ et } Rr = Mm.\,\frac{4a - p'}{p'}.$$

Substituant et divisant par Mm, on trouve

$$\frac{4a - p}{p} + \frac{4a - p'}{p'} = 2,$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a};$$

d'où l'on tire

$$p' = \frac{ap}{p - a}.$$

Lorsque a sera le quart du diamètre, p et p' seront les distances des foyers conjugués au miroir.

Il est facile de s'assurer que les quantités p et p' doivent être prises positivement lorsque les lignes qu'elles représentent sont dirigées dans la concavité du miroir, et négativement dans le cas contraire.

En considérant la sphère entière du miroir, le plan mené par le point lumineux perpendiculairement à l'axe du miroir divise ce miroir en deux parties telles, que le point lumineux est pour l'une de ces parties, situé entre le centre et la surface, et pour l'autre au-delà du centre. Les branches de caustiques qui correspondent à ces parties du miroir, ont évidemment pour tangente commune le rayon réfléchi correspondant au rayon incident perpendiculaire à l'axe. Ces rayons sont alors égaux entr'eux et à $2\,a$; le point correspondant de la caustique est évidemment un point de rebroussement.

Si la caustique doit avoir une asymptote, p' sera infini; on aura donc $\frac{1}{p} = \frac{1}{a}$; donc $p = a$; c'est-à-dire que le rayon

incident qui se réfléchira suivant l'asimptote, devra être le qua
de la corde totale. On peut le construire de la manière suivante

Soit (pl. *D*, fig. *b*) P le point lumineux qui doit être dans l
concavité du miroir, puisque p est positif. On prendra $PB=P$
et sur PB comme diamètre, on décrira un cercle qui coupera l
miroir aux points M et M'; les lignes PM et $P'M'$ seront l
rayons qui se réfléchiront suivant les asimptotes MK, $M'K'$. E
effet, si l'on abaisse CD perpendiculaire sur PM, les triangl
BMP, CPD seront égaux ; donc PM sera égal à PD, ou à l
moitié de MP, ou enfin au quart de MN.

Cette construction fait voir que la caustique ne peut avoi
d'asimptotes, ou, ce qui revient au même, de branches infi
nies, que dans le cas où la distance PC est plus grande que l
moitié du rayon.

Des Caustiques par réfraction.

Soient (pl. *D'*, fig. *c*) P le point lumineux ; PM, Pm le
deux rayons incidens infiniment voisins, qui se réfractent sui
vant deux droites MS, mS, qui se coupent au point P' de l
caustique par refraction.

Nommant r le rayon CM de la sphère, p le rayon inci
dent PM, p' le rayon réfracté MP', l le rapport du sinus d'in
cidence au sinus de réfraction, $2\,a$ la corde MN du cercle don
le rayon est r, et qui est dans la direction du rayon de lu
mière PM, $2\,b$ la corde MS dirigée suivant le rayon ré
fracté MS, I l'angle d'incidence, R l'angle de réfraction, o
a entre les quantités I, R, l, a, b, r, les relations suivantes

$$(1)\; l=\frac{\sin I}{\sin R}, \qquad \begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\left\{\begin{array}{l} a=r\cos I,\\ b=r\cos R.\end{array}\right.$$

$$dI=MPm+MCm=\frac{Mm+Nn}{2}.$$

$$dR=MCm-MP'm=\frac{Mm-Ss}{2}.$$

Considérant les petits arcs Mm, Nn, Ss, comme le
cordes d'un même cercle, on a les proportions suivantes :

$$p:p+2\,a::Mm:Nn=\frac{p+2\,a}{p}.\,Mm.$$

$$p':2b-p'::Mm:Ss=\frac{2\,b-p'}{p'}.\,Mm.$$

Substituant ces valeurs de Nn et Ss, on a

$$dI = \frac{p+a}{p} . Mm, \qquad dR = \frac{p'-b}{p'} . Mm.$$

L'équation (1) donne

$$\frac{dI}{dR} = \frac{l \cos R}{\cos I} = \frac{pp' + ap'}{pp' - pb}$$

mettant pour $\dfrac{\cos R}{\cos I}$ sa valeur tirée des équations (2), (3), on a

$$(4) \qquad bl - a = \frac{a^2}{p} + \frac{b^2 l}{p'} .$$

Nommant c la tangente menée par le point lumineux P au cercle du rayon CM, on a

$$(5) \qquad c^2 = p\,(p + 2a),$$

ayant cinq équations entre les six quantités I, R, a, b, p, p', la valeur de l'une d'elles, de p' par exemple, sera déterminée lorsqu'on donnera la valeur de p.

Les signes des rayons p et p', l'un incident, et l'autre réfracté, dépendent de leur position par rapport à la surface refringente. Lorsque ces rayons sont du même côté par rapport à cette surface, ils sont de signes différens, et ils sont de mêmes signes dans le cas contraire.

Examen de l'équation (4), *dans quelques cas particuliers.*

$$(4) \qquad bl - a = \frac{a^2}{p} + \frac{b^2 l}{p'} .$$

1° On suppose $a = b = r$;

Dans cette hypothèse, l'extrémité de p' est le point conjugué du point d'où part le rayon p; l'équation (4) devient

$$\frac{l-1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{l}{p'} .$$

2°. Le rayon incident se confond avec la tangente PM (fig. d) menée par le point lumineux P.

Dans ce cas $a = o$, et $p' = b$; c'est-à-dire que le point P' milieu de la corde $MS = 2b$, appartient à la caustique.

3°. r est infini.

Substituant dans l'équation (4) pour a et b leurs valeurs $r\cos I$, $r\cos R$, et supposant $r=\infty$, elle donne

$$\frac{\cos^2 I}{p}+l\frac{\cos^2 R}{p'}=0. \quad (6)$$

Les valeurs de p et p' étant nécessairement de signes différens on doit conclure que le point lumineux et la caustique sont d[u] même côté de la surface refringente.

4°. Pour avoir le point de rebroussement de la caustique, [il] faut supposer dans l'équation (6), $I=0$, et par conséquent $R=$[0] on a alors $p'=-pl$, c'est-à-dire, que les distances du poi[nt] lumineux et du point de rebroussement de la caustique à la sur[-]face réfringente, sont dans le rapport de l à 1.

M. Hassenfratz a fait graver, pour l'usage de l'Ecole Poly[-]technique, deux planches de caustiques, d'après les dessins [de] M. Girard. La première planche contient six caustiques p[ar] réflexion, et la seconde douze caustiques par réfraction. L[es] points singuliers de ces courbes ont été déterminés par l[es] constructions qui résultent de l'analyse précédente de M. Pe[tit].

H. C.

MÉCANIQUE.

Sur les Axes principaux, *par* M. LEFEBURE DE FOUR[CY], *répétiteur-adjoint de l'École Polytechnique.*

L'on sait de quelle importance sont en mécanique *les a[xes] principaux* des corps. La propriété d'être des *axes naturels* [de] *rotation* les caractérise de la manière la plus saillante. On [les] détermine encore lorsqu'on cherche les axes par rapport a[ux-] quels *le moment d'inertie* est un *maximum* ou un *minim[um]*. Enfin, l'on peut les considérer comme *formant un système* [de] *coordonnées orthogonales par rapport auquel la somme* [des] *produits de chaque molécule par le rectangle de deux* [quel-] *conques de ses coordonnées est égale à zéro*. Cette proprié[té] qui sert immédiatement à simplifier les équations du mouve[ment] d'un corps solide autour d'un point fixe, va nous faire trouver [les] axes principaux, par un calçul qui réunit la symétrie à la s[im-] plicité.

Concevons par un point quelconque O d'un corps solide, tr[...]

axes OX, OY, OZ, formant un système de coordonnées rectangulaires ; soient

$$x = az, y = bz;\ x = a'z, y = b'z;\ x = a''z, y = b''z;$$

les équations de trois droites OX', OY', OZ' formant un nouveau système d'axes rectangulaires, l'on aura

$$1 + aa' + bb' = 0,\ 1 + aa'' + bb'' = 0,\ 1 + a'a'' + b'b'' = 0\ (1).$$

Pour que ces droites soient les axes principaux du corps, il faut, en désignant par x', y', z', les coordonnées d'une molécule quelconque μ relativement aux axes OX', OY', OZ', que l'on ait encore

$$\int . x'y'\mu = 0,\ \int . x'z'\mu = 0,\ \int . y'z'\mu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

l'intégration devant embrasser toute l'étendue du corps.

Pour développer ces équations, je nommerai x, y, z, les coordonnées de la molécule μ relativement aux axes OX, OY, OZ; D la droite qui joint cette molécule à l'origine, et par δ l'angle formé par cette ligne avec l'axe OX', l'on aura

$$x' = D\cos\delta$$

l'on obtiendra $\cos\delta$ en remarquant que la droite D fait avec OX, OY et OZ, des angles qui ont pour cosinus $\frac{x}{D}$, $\frac{y}{D}$, $\frac{z}{D}$; que les cosinus des angles analogues formés par OX' sont $\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, et que par suite l'on a $\cos\delta = \frac{ax+by+z}{D\sqrt{1+a^2+b^2}}$; donc l'on a $x' = \frac{ax+by+z}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$; l'on a de même $y' = \frac{a'x+b'y+z'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$, et $z' = \frac{a''x+b''y+z}{\sqrt{1+a''^2+b''^2}}$,

D'après ces valeurs, si l'on pose, pour abréger,

$$\int . x^2\mu = f, \int . y^2\mu = g, \int . z^2\mu = h, \int . xy\mu = f', \int . xz\mu = g', \int . yz\mu = h',$$

les équations (α) deviendront

$$\left.\begin{array}{l}
aa'f+bb'g+h+(ab'+a'b)f'+(a+a')g'+(b+b')h'=0\\
aa''f+bb''g+h+(ab''+a''b)f'+(a+a'')g'+(b+b'')h'=0\\
aa''f+b'b''g+h+(a'b''+a''b')f'+(a'+u'')g'+(b'+b'')h'=0
\end{array}\right\}(2)$$

Ces équations réunies aux équations (1), déterminent en général les six quantités a, b, a', b', a'', b''. Pour arriver à l'équation finale en a, multiplions la première des équations (2) par a'', la deuxième par a', et retranchons celle-ci de la précédente ; multiplions-les ensuite par b'' et b', et retranchons encore la deuxième de la premiere, il viendra

$$A\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}
b(a'b''-a''b')f+(a'-a'')h+a(a'b''-a''b')f'\\
+a(a'-a'')g'+b(a'-a'')h'+(a'b''-a''b')h'=0
\end{array}\right.$$

$$B\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}
a(a'b''-a''b')f-(b-b'')h+b(a'b''-a''b')f'\\
-a(b'-b'')g'+(a'b''-a''b')g'-b(b'-b'')h=0
\end{array}\right.$$

Les mêmes opérations faites sur les deux premières équations (1) donnent

$$A' \ldots\ldots\ldots\ldots (a'-a'')+b(a'b''-a''b')=0$$

$$B' \ldots\ldots\ldots\ldots -(b'-b'')+a(a'b''-a''b')=0$$

Entre les équations A et A' éliminant $a'-a''$ et $a'b''-a''b'$; entre B et B' éliminant pareillement $b'-b''$ et $a'b''-a''b'$, l'on trouve

$$bg-bh+af'-abg'-b^2h'+h'=0 \text{ et } af-ah+bf'-a^2g'+g'-abh'=0$$

la dernière de ces équations donne

$$b=\frac{a^2g'+a(h-f)-g'}{f'-ah'};$$

Cette valeur mise dans la première conduit à l'équation finale

$$F\ldots\left.\begin{array}{l}
-h'\{a^2g'+a(h-f)-g'\}^2+\{g-h-ag'\}\\
\{a^2g'+a(h-f)-g'\}+\{af'+h'\}\{f'-ah'\}^2
\end{array}\right\}=0$$

Cette équation paroît être du quatrième degré ; mais il est facile de voir que le coefficient de a^4 est nul : ainsi elle n'est que du troisième ; donc elle donnera pour a au moins une valeur

réelle, et par suite une valeur réelle pour b. En substituant ces valeurs de a et de b dans la première des équations (1) et (2), l'on aura pour a' et b' des valeurs réelles qui, substituées à leur tour dans la dernière des équations (1) et (2), feront trouver aussi des valeurs réelles pour a'' et b''. Donc pour chaque point d'un corps, il existe toujours un systême d'axes principaux.

Les équations (1) et (2) étant symétriques relativement aux inconnues, il s'ensuit que l'équation F doit donner les valeurs de a, a' et a'' ; mais elle n'est que du troisième degré ; donc, en général, il n'y a qu'un systême d'axes principaux.

Cependant il y a des cas particuliers où il peut en exister plusieurs. La discussion de ce cas est facile, et peut se faire de plusieurs manières ; nous ne nous y arrêterons pas.

Des Polygones et des Polyèdres.

M. Cauchy, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, ingénieur des Ponts et Chaussées, a présenté à l'Institut, en février 1811 et janvier 1812, deux beaux mémoires sur les polygones et les polyèdres ; ils seront imprimés dans le seizième cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique de cette année. On connoîtra l'objet de ces deux mémoires, par les rapports suivans que la Classe de l'Institut a approuvés.

Rapport sur un Mémoire de M. Cauchy, *concernant les Polyèdres, par M. Malus (6 mai 1811).*

La classe nous a chargés, M. Le Gendre et moi, de lui rendre compte d'un mémoire de M. Cauchy, renfermant différentes recherches sur les polyèdres.

Ce mémoire est divisé en deux parties. Dans la première, M. Cauchy démontre qu'il n'existe pas d'autres polyèdres réguliers, que ceux dont le nombre des faces est 4, 6, 8, 12 ou 20.

M. Poinsot, dans un mémoire où il a donné la description de polygones et de polyèdres d'une espèce supérieure à celle qu'on a coutume de considérer, avoit déjà observé qu'on pouvoit former tous les polygones d'espèce supérieure, en prolongeant les côtés des polygones réguliers de première espèce. C'est en géné-

ralisant les principes renfermés dans le mémoire de M. Poinsot, que M. Cauchy est parvenu à faire dériver les polyèdres réguliers d'espèce supérieure de ceux de première espèce, ce qui l'a conduit d'une manière simple et analytique à la solution de la question qu'il s'étoit proposée.

Il commence par prouver que, dans un ordre quelconque, on ne peut construire des polyèdres réguliers d'une espèce supérieure, qu'autant qu'ils résultent du prolongement des arêtes ou des faces des polyèdres réguliers du même ordre et de première espèce qui leur servent de noyau, et que, dans chaque ordre, les faces des polyèdres d'espèce supérieure doivent avoir le même nombre de côtés que celles des polyèdres de première espèce.

Il suit de là que, comme il n'y a que cinq ordres de polyèdres réguliers de première espèce, on ne doit chercher que dans ces cinq ordres, des polyèdres réguliers d'espèce supérieure; en sorte que tous les polyèdres réguliers, de quelque espèce qu'ils soient, doivent être des tétraèdres, des hexaèdres, des octaèdres, des dodécaèdres ou des icosaèdres.

Après avoir donné la solution principale, M. Cauchy examine combien chaque ordre renferme d'espèces différentes, et il conclut de ses recherches qu'on ne peut former de polyèdres réguliers d'espèce supérieure que les quatre décrits par M. Poinsot.

Dans la seconde partie de son mémoire, M. Cauchy généralise un théorême d'Euler, relatif à l'équation qui existe entre les différens élémens qui composent la surface d'un polyèdre.

Euler avoit démontré que le nombre des sommets ajouté à celui des faces surpassoit de deux unités le nombre des arêtes.

M. Cauchy a étendu ce théorême de la manière suivante:

Si on décompose un polyèdre en tant d'autres que l'on voudra, en prenant à volonté dans l'intérieur de nouveaux sommets, la somme faite du nombre des sommets et de celui des faces surpassera d'une unité la somme faite du nombre des arêtes et de celui des polyèdres.

Le théorême d'Euler n'est qu'un cas particulier de celui-ci, dans lequel on suppose qu'on ne considère qu'un seul polyèdre.

M. Cauchy, en décomposant le polyèdre, déduit de son théorême général un second théorême relatif à la géométrie plane. Si on prend une des faces du polyèdre pour base, et si on transporte sur cette face tous les autres sommets sans changer leur nombre, on obtient une figure plane composée de plusieurs polygones renfermés dans un contour donné. Dans ce cas, la somme faite de

nombre des polygones et de celui des sommets surpasse d'une unité le nombre des droites qui forment les côtés de ces polygones. M. Cauchy parvient directement à ce résultat, en égalant à zéro, dans son théorême général, la quantité qui représente le nombre des polyèdres. Ce second théorême est, dans la géométrie plane, l'équivalent du premier dans la géométrie des polyèdres.

Les démonstrations sur lesquelles M. Cauchy appuie ses théorêmes sont rigoureuses et exposées d'une manière élégante. Vos commissaires pensent que ces considérations sur les polygones et les polyèdres sont assez curieuses et assez neuves pour intéresser les géomètres, et que le mémoire de M. Cauchy mérite d'être approuvé par la classe et imprimé dans le Recueil des Savans étrangers.

Rapport fait par M. Le Gendre; 17 *février* 1812.

Il y a environ un an que M. Cauchy présenta à la classe un mémoire portant le même titre que celui-ci, dont l'objet étoit de généraliser un théorême d'Euler et de compléter la théorie d'une nouvelle espèce de polyèdres réguliers, découverte par M. Poinsot. Ce mémoire obtint l'approbation de la classe sur le rapport de M. Malus. On le regarda comme le fruit d'un talent déjà exercé, et qui devoit par la suite obtenir de plus grands succès. J'engageai alors l'auteur à continuer ses recherches sur les polyèdres, dans la vue de démontrer un théorême intéressant que supposent les définitions 9 et 10 du 11ᵉ livre d'Euclide, et qui n'est pas encore démontré.

Ce théorême dont j'ai parlé fort au long dans les notes de ma géométrie, et auquel j'ai ajouté la restriction nécessaire, pour qu'il ne fût pas sujet à l'objection faite par Robert Simson dans son édition des Élémens d'Euclide, peut s'énoncer de la manière suivante :

« Deux polyèdres *convexes* sont égaux lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de polygones égaux chacun à chacun, et disposés entr'eux de la même manière. »

Le sens de ce théorême est qu'un polyèdre convexe étant donné, il est impossible de faire varier les inclinaisons mutuelles des plans qui le terminent, de manière à produire un second polyèdre convexe compris sous les mêmes faces et dis-

posé de la même manière ; on peut bien former un second polyèdre symétrique au premier et qui lui soit égal dans toutes ses parties constituantes, mais les faces y seroient disposées dans un ordre inverse autour de chaque angle solide, et ces deux solides ne pourroient être superposés. Ainsi ce cas ne fait aucune exception à la proposition générale.

C'est sans doute un problême plus que déterminé, que celui de construire un polyèdre avec des faces données et assemblées suivant un ordre donné ; mais l'analyse ne s'applique pas avec succès à ce genre de problême, il n'y a pas précisément de caractère analytique qui distingue un polyèdre convexe d'un polyèdre qui a des angles rentrans. D'ailleurs l'analyse d'où l'on devroit conclure qu'un seul polyèdre satisfait à la question, ne manqueroit pas d'être extrêmement compliquée. Il faut donc savoir en pareil cas se tracer une route particulière pour parvenir à la solution ; ce n'est que par une profonde méditation du sujet et par des réductions à l'absurde qu'on peut espérer de réussir dans ces sortes de recherches qui, pour la difficulté et pour le genre de méthodes, ont quelque analogie avec celles qui s'offrent à chaque pas dans la théorie des nombres.

En donnant une idée de la difficulté de la question que nous avions proposée à M. Cauchy, nous mettons la classe à portée d'apprécier le mérite de la solution qu'il en a donnée dans le mémoire dont nous avons à rendre compte.

Ce mémoire est divisé en deux parties : la première contient huit théorêmes sur les polygones convexes rectilignes ou sphériques. La seconde en contient cinq sur les angles solides et les polyèdres convexes. Mais ce dernier est l'objet principal du Mémoire, et les autres ne doivent être considérés que comme des lemmes nécessaires à la démonstration de celui-ci.

Dans la première partie, l'auteur considère les variations qui peuvent avoir lieu dans les angles d'un polygone convexe, rectiligne ou sphérique, dont les côtés demeurent constans. Si le polygone n'avoit que trois côtés, il ne pourroit y avoir aucune variation dans les angles. Ainsi on suppose constamment que le polygone a au moins quatre côtés ; alors on voit que sans cesser d'être convexe, il peut, en conservant les mêmes côtés, prendre une infinité de formes différentes. J'avois donné deux propositions sur cet objet dans la première édition de ma Géométrie; M. Cauchy a porté jusqu'à huit le nombre de ces propositions, et les a démontrées d'une manière qui lui est propre.

Dans la seconde partie, l'auteur applique d'abord aux angles solides les résultats qu'il avoit trouvés pour les polygones sphé-

riques. Les deux théorêmes qu'il donne à cet effet peuvent être compris dans l'énoncé suivant :

« Si les angles plans qui composent un angle solide convexe à » plus de trois faces, demeurent constans et qu'on fasse varier » d'une manière quelconque les inclinaisons mutuelles de ces » plans, ou, pour abréger, les inclinaisons sur les arêtes, si » on met ensuite sur chaque arête le signe + ou le signe —, se- » lon que l'inclinaison sur cette arête augmente ou diminue, et » qu'on ne mette aucun signe aux arêtes sur lesquelles l'incli- » naison ne varieroit pas, je dis qu'on trouvera au moins quatre » variations de signe en faisant le tour de l'angle solide. »

De là M. Cauchy passe aux théorêmes 11, 12 et 13, sur les polyèdres convexes. Le théorême 11 n'est autre chose que le théorême d'Euler connu par la notation $S + H = A + 2$. Le théorême 12 est une extension fort remarquable du théorême d'Euler au cas où les faces au lieu d'être planes, seroient considérées simplement comme des espaces terminés par plusieurs droites non situées dans le même plan. En effet, si chacun de ces espaces compte pour une face, si en même temps les angles solides continuent d'être convexes, il n'y a aucun changement à faire à la démonstration du théorême d'Euler, telle que je l'ai donnée dans ma Géométrie, et on parvient toujours à l'équation $S + H = A + 2$.

Pour venir enfin à la démonstration du théorême 13, qui est l'objet principal de ce Mémoire, l'auteur suppose d'abord qu'on fasse varier à-la-fois les inclinaisons sur toutes les arêtes. Cette supposition ne pourroit avoir lieu à l'égard des angles solides triples qui sont invariables; mais dans tout polyèdre donné on peut supprimer les angles solides triples, et le théorême ne sera à démontrer que pour les polyèdres dont tous les angles solides sont composés de quatre angles plans ou plus.

Supposant donc avec l'auteur que les inclinaisons sur les arêtes varient toutes à-la-fois, cherchons combien il y a de variations de signe d'une arête à la suivante. Il y a deux manières de compter ces variations; l'une en les considérant successivement sur les divers angles solides, l'autre en les considérant sur les diverses faces. On est d'ailleurs assuré que le nombre total, estimé d'une manière ou de l'autre, sera toujours le même ; car deux arêtes consécutives qui appartiennent à l'un des angles solides, appartiennent en même temps à l'une des faces, *et vice versâ*.

Cela posé, puisqu'en vertu du théorême rapporté ci-dessus on doit compter au moins quatre variations autour de chaque

angle solide, le nombre cherché N devra au moins être égal à $4S$, de sorte qu'on aura $N > 4S$. C'est la première limite de N.

En second lieu, si on examine les successions de signes placés sur les côtés de chacune des faces et qu'on estime les variations au plus grand nombre possible, on trouve que dans un triangle le nombre des variations ne peut être plus grand que 2; que dans un quadrilatere et dans un pentagone il ne peut surpasser 4; que dans un hexagone et dans un heptagone il ne peut surpasser 6, et ainsi de suite. Donc, si la surface du polyèdre est composée de a triangles, de b quadrilatères, de c pentagones, etc., le nombre total des variations ne pourra être plus grand que $2a + 4b + 4c + 6d + 6e +$ etc.

Mais il est facile de voir, au moyen de l'équation $S + H = 2$, que la quantité précédente est moindre, ou tout au plus égale à $4S - 8$. Donc on auroit à-la-fois $N > 4S$ et $N < 4S - 8$; résultat absurde, et nous conclurons qu'il est impossible que les inclinaisons sur les arêtes varient toutes à-la-fois dans le polyèdre donné.

Supposons maintenant que les inclinaisons sur quelques-unes des arêtes demeurent constantes, tandis que les autres varient; si on supprime toutes les arêtes où l'inclinaison ne varie pas, on supprimera en même temps des parties de la surface du polyèdre proposé, qui ne seront sujettes à aucune variation, et on aura un polyèdre nouveau, dont toutes les faces ne seront point planes, mais qui tombera dans le cas du théorème 12, et qui, par conséquent, satisfera encore à l'équation :

$S + H = A + 2$, entendant par H le nombre total des faces, soit planes, soit terminées par une suite de droites non situées dans un même plan.

Ayant ainsi réduit le polyèdre proposé à un autre dans lequel les inclinaisons sur les arêtes varient toutes à-la-fois, on retombe dans le premier cas, et on conclut de même que la figure du polyèdre est invariable.

Il est donc démontré que deux polyèdres convexes sont égaux et peuvent être superposés, lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de polygones égaux chacun à chacun, et disposés de la même manière dans les deux solides.

Nous voulions ne donner qu'une idée de la démonstration de M. Cauchy, et nous avons rapporté cette démonstration presque toute entière. Nous avons ainsi fourni une preuve plus évidente de la sagacité avec laquelle ce jeune géomètre est parvenu à vaincre une difficulté qui avoit arrêté des maîtres de l'art, et

qu'il étoit important de résoudre pour le perfectionnement de la théorie des solides. Nous pensons, en conséquence, que ce Mémoire mérite d'être approuvé par la classe et imprimé dans le Recueil des Savans étrangers.

Signé Biot, Carnot, Le Gendre, *rapporteur.*

La classe approuve le rapport et en adopte les conclusions.

---

§. II.

ANNONCES D'OUVRAGES.

Rapport du Conseil de Perfectionnement de l'Ecole Impériale Polytechnique, session de 1811 *à* 1812.

Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction de cet établissement, 7ᵉ. et 8ᵉ. cahiers; 1 vol. in-4°.

Ce cahier contient les leçons de mathématiques données à l'ancienne Ecole Normale, par MM. Lagrange et Laplace, et un Mémoire sur le contact des sphères, par Fermat, trad. du latin par M. Hachette.

Traité de Mécanique, par M. Poisson, 2 vol. in-8°.

Sommaires des Leçons du Cours de Mécanique de M. Prony; 1 vol. in-4°.

Supplément de la Géométrie descriptive de Monge, par M. Hachette, 1 vol. in-4°.

Uranographie, ou *Traité Elémentaire d'Astronomie*, par M. Francœur; 1 vol. in-8°.

Sidérotechnie, ou *l'Art d'extraire la fonte, le fer, l'acier, des minerais qui les contiennent*, par M. HASSENFRATZ, 4 vol. in-4°., et 80 planches.

Mémoire sur les Tribus arabes des déserts de l'Egypte, *Mémoire sur les branches du Nil*, par M. DUBOIS AIMÉ, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, directeur des douanes à Livourne.

Dictionnaire historique de Musique, par M. CHORON, ancien élève de l'Ecole Polytechnique ; 2 vol. in-8°.

M. GAULTIER, Professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts, a présenté à l'Institut un Mémoire fort intéressant sur les contacts des sphères. On en rendra compte dans le prochain cahier.

§. III.

PERSONNEL.

M. Durivau, chef de bataillon du Génie, a été nommé, par décret impérial du 17 avril 1812, directeur des Etudes de l'Ecole Polytechnique. M. le baron de Vernon, qui occupoit cette place, a été admis à la retraite.

M. Poisson a été nommé par Sa Majesté, Examinateur de l'Artillerie, le 18 avril 1812, et Membre de l'Institut, le 23 mars même année.

M. Etienne-Louis Malus, major au corps impérial du Génie, Membre de la Légion d'Honneur, de l'Institut impérial de France, nommé provisoirement Directeur des Etudes de l'Ecole Polytechnique, est décédé le 23 février 1812, âgé de 37 ans. Les Elèves présens à ses funérailles ont entendu avec émotion et attendrissement les éloges prononcés sur sa tombe par

MM. Biot, Delambre, et Couche, major du Génie. En rappelant cette scène de douleur, qu'il soit permis de citer une partie du discours lu par M. Couche, au nom du comité des Fortifications. Les Elèves qui n'ont pas eu l'avantage de connoître M. Malus, sauront l'apprécier comme le modèle des officiers que l'Ecole Polytechnique a pour objet de former.

« Le comité de fortifications vient mêler ses regrets à ceux de l'Institut et de l'Ecole Polytechnique, et déplorer avec eux la mort prématurée d'un digne successeur des Meunier, des Coulomb, de ces hommes que le corps du génie se glorifie d'avoir élevés pour les progrès des sciences qui le guident et l'éclairent dans ses travaux. C'est au corps illustre qui dirige ces progrès vers la gloire et l'utilité de l'Etat, à dire par quelles brillantes découvertes Malus a, sur les traces de Newton, reculé les bornes de l'optique. Cette première Ecole du monde rappellera ce que ses examens, les discussions de ses conseils et la direction de ses études, doivent à Malus, à la profonde intelligence des rapports qui unissent les sciences aux arts de l'ingénieur. Ses camarades ne peuvent que préluder à ces éloges, par le tableau simple et rapide de ses services militaires. Ils l'ont vu, soldat et travaillant aux fortifications de Dunkerque, venir se placer parmi les chefs de brigade de l'Ecole Polytechnique, instruire les autres en s'instruisant, et prendre enfin dans le corps du génie le rang que lui assignoient l'éclat et le succès de ses études. Toujours brave, savant, estimé de ses chefs et cher à ses camarades, il a partagé leurs périls aux armées de Sambre-et-Meuse, du Nord et d'Egypte; aux batailles de Chebriès, des Pyramides, d'Héliopolis et de Coraïm; aux siéges d'El-Arish, de Jaffa et du Caire. L'armée d'Orient l'a vu à Jaffa braver la peste pour établir les hôpitaux de l'armée, souffrir tous les maux de cette horrible contagion, et n'en guérir que pour sacrifier de nouveau sa vie à son devoir. Ce devoir, sous ce climat brûlant, n'épuisoit point son ardeur, et dans les loisirs de son service, il coopéroit à ces travaux par lesquels les sciences et les arts s'efforçoient de créer des ressources à l'armée et s'associoient à sa gloire. A son retour, dans les sous-directions d'Anvers, de Kehl et de Paris, au comité des fortifications, soit qu'il fallût asseoir des travaux, discuter des projets, ou résoudre ces questions d'art qui exigent tous les secours de la théorie et de l'expérience, par-tout il a déployé ces mêmes lumières et ce même sentiment de son devoir, qui soumettoient aux détails de son service ses plus glorieux travaux dans les sciences. »

Promotions des anciens Elèves de l'Ecole Polytechnique à des *grades supérieurs*. (*Voyez* les premières promotions, pag. 297 de ce volume.)

Artillerie.

Chefs de bataillon, MM. Desclaibes-D'Hust. — Leclerc. — Lunel. — Châteaubrun.

Génie Militaire.

Chefs de bataillon, MM. Durivau. — Michaud. — Marion. — Jules Foucault. — Thiébaut. — Guiraud. — Roux-la-Mazelière. — Ménissier.

Génie Maritime.

Ingénieurs de Marine (*), MM. Chaumont, en 1809. — Boucher, en 1810. — Greslé. — Ledean. — Tupinier, en 1811.

Ponts-et-Chaussées.

Ingénieurs en chef. MM. Duval. — Favier. — Polonceau. — Le Payen. — Lescure Belle-Rive. — Coic. — Derrien. — Eustache. — Fouques-Duparc. — Pattu. — Cordier.

Faculté des Sciences de Paris.

Les candidats au doctorat, qui ont obtenu ce grade après avoir soutenu les thèses exigées de mécanique et d'astronomie, sont au nombre de trois, savoir : M. Bourdon, professseur au lycée Charlemagne, MM. Lefebure-Fourcy et Petit, répétiteurs à l'Ecole Impériale Polytechnique.

(*) Ont le rang et la décoration de chef de bataillon.

CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

La douzième session du Conseil de Perfectionnement a été ouverte le 22 novembre 1811 et terminée le 10 mai 1812.

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'Ecole, Président.

S. Exc. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics, membres désignés par la loi.

MM, Legendre, Lacroix, Malus, Descotils.

Membres de l'Institut National, pris, selon la loi, dans la classe des Sciences physiques et mathématiques.

MM. les comtes Laplace, Lagrange, Berthollet.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Guerre.

M. le baron Eblé, général de division d'artillerie; MM. Allent, officier supérieur du génie; Puissant, officier supérieur au corps impérial des ingénieurs géographes; Riffault, administrateur général des Poudres et Salpêtres.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Marine.

M. le comte Sugny, inspecteur-général d'artillerie de marine, M. le baron Sane, inspecteur-général du génie maritime.

Nota. M. le comte Sugny n'étant pas à Paris, a été remplacé par M. le général Thirion, inspecteur-adjoint d'artillerie de marine.

Désignés par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur.

MM. Girard ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Lelièvre, inspecteur-général des Mines.

Directeur des études de l'Ecole Polytechnique.

M. Durivau.

Commissaires choisis par le Conseil d'Instruction de l'Ecole, parmi ses Membres.

MM. Monge, comte de Péluse, Poisson, Ampère, Duhays.

Secrétaire du Conseil.

M. Marielle, capitaine quartier-maître de l'Ecole Polytechnique.

Extrait du Rapport fait au Conseil d'Instruction de l'Ecole Polytechnique, sur les travaux du Conseil de Perfectionnement pendant la session de 1811 *et* 1812.

Par M. Durivau, Directeur des Etudes.

22 mai 1812.

Le Conseil de Perfectionnement a tenu cinq séances. Les trois premières ont été consacrées à l'examen des programmes de l'enseignement et des livres à l'usage de l'Ecole. Le Conseil a reconnu qu'il étoit indispensable d'assigner plus de temps aux études, et sur-tout aux exercices des arts graphiques. Cette extension réduisant à un très-petit nombre de leçons les cours de constructions et d'art militaire, il a pensé qu'il valoit mieux supprimer le cours de constructions, et convertir le cours d'art militaire en un cours d'application de la géométrie descriptive et de la topographie aux arts de l'ingénieur et au service de l'officier. Dans la quatrième séance, on a entendu la lecture des observations faites par le Conseil de l'Ecole d'Artillerie et du Génie de Metz, sur l'enseignement de l'Ecole Polytechnique. La Commission chargée de les examiner, les reconnoît fondées; et sur sa proposition, le Conseil de Perfectionnement a adopté la conclusion suivante: 1°. Que les Elèves feroient un plus grand nombre d'épreuves de géométrie descriptive, de machines et de topographie; 2°. que MM. les professeurs de topographie de Metz seroient invités à se concerter avec MM. les professeurs des ingénieurs-géographes, pour que la méthode d'enseignement de la topographie fût uniforme dans tous les services. Dans cette même séance, M. Duhays a annoncé qu'il travailloit à la rédaction de ses leçons sur l'art militaire. Son Excellence le Président du Conseil donne à M. le quartier-maître un témoignage de son contentement pour les talens et le zèle qu'il apporte dans l'exer-

cice de ses fonctions. Le Conseil a invité Son Excellence le Ministre de l'Intérieur à décider que M. Sganzin, dont le cours des constructions étoit supprimé, continueroit à jouir du titre de professeur. Cette disposition a été approuvée. (*Lettre de S. E. le Ministre de l'Intérieur à M. le Comte de Cessac, 22 février* 1812.)

Le Conseil accorde à M. Poinsot le titre de professeur-adjoint. Il accorde ce même titre à M. Arago, et règle la part qu'il prendra à l'enseignement ; elle consiste à faire le cours de géodésie pour la première division, et à alterner avec M. Hachette, tant pour les leçons de géométrie descriptive, que pour celles d'analyse appliquée à la géométrie.

Dans la cinquième séance, le Conseil a entendu le rapport à Sa Majesté, sur les derniers travaux, et sur la situation de l'Ecole Polytechnique. Ce rapport, rédigé par M. le chevalier Allent, comprend les deux sessions de 1810 à 1811, et de 1811 à 1812 ; il est terminé par le tableau suivant, qui présente l'emploi de toutes les promotions de l'Ecole depuis sa création (novembre 1794), jusqu'à ce jour (10 mai 1812).

Services publics.

Artillerie { de terre, 685 / de mer, 35 }	. . . . . .	720
Génie militaire	. . . .	355
Ponts-et-Chaussées	. . . .	330
Génie maritime	. . . .	61
Mines	. . . .	56
Géographes	. . . .	45
Poudres et Salpêtres	. . . .	9
Instruction publique	. . . .	30
Aspirans de marine	. . . .	45
Infanterie	. . . .	86
		1737

CONCOURS DE 1811.

Examinateurs d'admission à l'Ecole Polytechnique.

Paris.	M. Francœur.
Tournée du Sud-Ouest.	M. Labey.
Tournée du Nord-Est.	M. Dinet.
Tournée du Sud-Est.	M. Reynaud.

Les examens ont été ouverts le 1er. août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission a prononcé, les 28 septembre et 6 octobre 1811, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

Quatre cent cinquante candidats ont été examinés;

SAVOIR:

A Paris.	191	450.
Dans les Départemens.	259	

Sur ce nombre, 293 ont été jugés admissibles;

SAVOIR:

de l'examen de Paris.	126	293.
des Départemens.	167	

Un Candidat a été écarté du concours pour raison d'infirmités.

Vingt-deux ont été rejetés, et dix reculés dans l'ordre d'admission, parce qu'ils ne dessinoient pas assez bien.

Vingt-un ont été rejetés de même, et huit reculés pour [illegible] d'instruction dans les langues française et latine.

Un candidat enfin doit essentiellement son admission à une supériorité marquée dans l'art du dessin.

Le nombre des candidats admis par le Jury a été de 165.

SAVOIR:

de Paris.	70	165.
des Départemens.	95	

Nombre des élèves admis à l'Ecole jusqu'au 1er. novembre 1810.	2473.
Total des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement.	2638.

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des 165 candidats admis à l'Ecole impériale Polytechnique, suivant les décisions du jury des 28 septembre et 6 octobre 1811.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Ajasson de Grandsagne.	François.	Domérot.	Creuse.
Amphoux.	Jean-Marc-Marie.	Chambéry.	Mont-Blanc.
Anfossi.	Louis-Marie-Léon-Vinc.	Colorno.	Taro.
Arago.	Pierre-Jean-Victor.	Estagel.	Pyrén.-Orient.
Arnoux.	Jean-Cl.-Républicain.	Le Cateau.	Nord.
Artaud (Charles dit).	Adrien.	Paris.	Seine.
Auvé.	Auguste-Michel-Louis.	La Flèche.	Sarthe.
Balladier.	Jean-Annet-Claude.	Montluçon.	Allier.
Barthes.	Jean Et.-Frédér.-Marie.	Saint-Félix.	Haute-Garonne
Bédigie.	Jean-Claude-François.	Paris.	Seine.
Belland.	Michel-Auguste.	Paris.	Seine.
Berthault.	Léonard-Philib.-Marie-Felix.	Châlons-sur-Saône.	Saône-et-Loire
Berthereau de la Giraudière.	Augustin-Hippolyte.	Neung-sur-Beuvron.	Loir-et-Cher.
Bing.	Isaac.	Metz.	Moselle.
Bizot.	Michel-Brice.	Bitche.	Moselle.
Blanchard.	Claude-Olivier.	Mortagne.	Vendée.
Boscary.	Pierre-Louis.	Vernaison.	Rhône.
Botto.	Dominique-Joseph.	Moneglia.	Apennins.
Boutault.	Paul-Emile.	Montelimart.	Drôme.
Brillard.	Aug.-Joachim-Marie.	Bure, commune de Morainvilliers.	Seine-et-Oise.
Brisson	Pierre-Benjamin.	Paris.	Seine.
Campaignac.	Antoine-Bernard.	Montgeard.	Haute-Garonne
Castaignet.	Guill.-Ch.-Paulin.	Paris.	Seine.
Challaye.	Aristide.	Sens.	Yonne.
Charon.	Viala.	Paris.	Seine.
Chevalier.	Hervé-Arsène-Pierre.	Cherbourg.	Manche.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Cléry.	Louis-Victor.	Berlin en Prusse.	
Contencin.	Paul.	Tours.	Indre-et-Loire.
Corbin.	Edme.	Saint-Just.	Cher.
Cornisset.	Touss.-Franç.-Prosper.	Villeneuve-sur-Yonne.	Yonne.
Cramouzaud.	Léonard.	Saint-Pierre-Château.	Haute-Vienne.
Crova Vaglio.	Mart.-Oct.-Fr.-Marie.	Nizza de Montferrat.	Montenotte.
Dalesme.	Jean-Baptiste-Casimir.	Poitiers.	Vienne.
Dautheville.	François.	Chalançon.	Ardèche.
Delannay.	Nicolas-Henri.	Rouen.	Seine-Infér.
Delbet.	Jean.	Joursac.	Cantal.
De l'Espée.	Jos.-Franç.-Casimir.	Froville.	Meurthe.
Delon.	Honoré-Edouard.	Montpellier.	Hérault.
Delorme.	Jean-Marie.	Vienne.	Isère.
Demonthiers de Boisroger.	Ange-Charles.	Pontoise.	Seine-et-Oise.
Deniépôrt.	Etienne-Vincent.	Rouen.	Seine-Infér.
Deroys Saint-Michel.	Pierre-Henri-Joseph.	Valliguière.	Gard.
Devienne.	Alexis-Dominique.	Paris.	Seine.
Ditch.	Laurent.	Auxonne.	Côte-d'Or.
Domergue.	André-Gabriel-Pierre.	Paris.	Seine.
Donnat.	Jean-Xav.-Prosp.-Anab.	Montpellier.	Hérault.
Dosque.	Luc.	Castandet.	Landes.
Doulcet Pontécoulant.	Philippe-Gustave.	Paris.	Seine.
Ducros.	Jean-Sébastien-Victoire-Jemmapes.	Castres.	Tarn.
Duhousset.	François-Chéri.	Longeville les Saint-Avold.	Moselle.
Dumarchais (Gille dit).	François-Charles.	Tours.	Indre-et-Loire.
Dumesniladelée.	Bon-Amédée.	Coutances.	Manche.
Empaytaz.	Bénédict-Frédéric.	Paris.	Seine.
Fabre.	Albin-Camille-François.	La Fère.	Aisne.
Fauchon.	Alexandre-Prosper.	Amiens.	Somme.
Fauquier.	Jean-Pensée.	Nismes.	Gard.
Faure de Fournoux.	Télémaque.	Fournoux.	Creuze.
Fauveau.	Joseph-Germ. Chéri.	L'Orient.	Morbihan.
Feuardant, dit d'Eculleville.	Anne-Hilar.-Auguste.	Equeurdreville.	Manche.
Ferrandin-Gazan.	Joseph-Guillaume.	Carcès.	Var.
Frémont.	Pierre-Alexandre.	Bruxelles.	Dyle.
Fromentin.	Armand.	Paris.	Seine.
Fuchsamberg.	Fabro.	Belfort.	Haut-Rhin.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Gambier.	Antoine-Henri-Jean.	Essomes.	Aisne.
Garnier.	Gustave-Benoit.	Bordeaux.	Gironde.
Gauchet.	Liberté-David	Vergoncey.	Manche.
Gaudin.	Franç.-Antoine-Aimé.	La Rochelle.	Charente-Inf.
Gaullier.	Gustave.	Saumur.	Maine-et-Loire
Gernaert.	François-Joseph.	Dunkerque.	Nord.
Gilbert.	Emile-Jacques.	Paris.	Seine.
Gillet.	Gessner.	Versailles.	Seine-et-Oise.
Gimmig.	Pierre-Geoffroy-Marie.	Marseille.	Bouc.-du-Rh.
Ginet.	Pierre.	Pujols.	Lot-et-Garon.
Girard.	Aimé-Auguste.	L'Isle sur le Serein.	Yonne.
Giraud.	Marc-Sébastien-Xavier.	Le Puy.	Haute-Loire.
Girault.	Jean-Jacques.	Les Coudrais.	Loir-et-Cher.
Gloux.	Louis-Joseph-Léger.	Paris.	Seine.
Godard d'Isigny.	Alexandre-Henri.	Isigny.	Manche.
Gombault.	Emile.	Paris.	Seine.
Gougeon.	Jean-Baptiste.	Metz.	Moselle.
Goupil Préfelne.	Paul-François.	Argentan.	Orne.
Goupilleau.	Paul-Henri.	Roche-Servière.	Vendée.
Grivet.	Pierre-Auguste-Marius.	Vauréas.	Vaucluse.
Groult.	Adrien-Auguste.	Cherbourg.	Manche.
Guéry.	Augustin.	Epinal.	Vosges.
Giraudet-Saint-Amé.	Alexandre-Jos.-Eugène.	Paris.	Seine.
Hacquin.	Jean-Victor.	Paris.	Seine.
Hermann.	Chrétien-Laurent.	Cap de B.-Espér.	
Houdaille.	Aristide.	Paris.	Seine.
Labarbe.	Prudence-Franç.-Eléon.	Canville.	Seine-Infér.
Lacave Laplague.	Jean-Pierre-Joseph.	Montesquiou.	Gers.
Ladevêse.	Auguste.	Le Mas d'Azilh.	Arriège.
Lafitte.	Pierre-Louis.	Agen.	Lot-et-Garon.
Lair.	Jean-Jacques.	St.-Jean d'Ang.	Charente-Inf.
Lallemand de Cullion.	Alexis-Louis-Philippe.	Paris.	Seine.
Lamarque.	René-Casimir.	Poitiers.	Vienne.
Lanty.	Jean-Baptiste-Albert.	Metz.	Moselle.
Largeteau.	Charles-Louis.	Mouilleron.	Vendée.
Le Bouédec.	Yves-René-Laur.-Marie	Crozon.	Finistère.
Lecamus.	Charles-Louis-François.	Paris.	Seine.
Lecoq.	Scævola.	Cognac.	Charente.
Lefaivre.	Antoine-François.	Schelestatt.	Bas-Rhin.
Lelasseux Lafosse.	Jul.-Alexand.-Monique.	Auvers le Hamon.	Sarthe.
Lelièvre.	Martial-Bienvenu.	Domfront.	Orne.
Le Mauff.	Julien-Marie-François.	Questembert.	Morbihan.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Lindenmeyer.	Jean-Frédéric-Charles.	Grumbach.	Sarre.
Loppé.	Samuel-Etienne.	Alençon.	Orne.
Lorieux.	Bonavent.-Jean-Marie.	Le Croisic.	Loire-Infér.
Magniez.	Antoine-François.	Hendicourt.	Somme.
Mallat.	Casimir-Décadi.	Blanzac.	Charente-Inf.
Marchais.	Louis.	Angoulême.	Charente.
Mazé.	Laur.-Fr.-Louis-Marie.	Laz.	Finistère.
Meilheurat.	Barthelemy-Paul.	Gannat.	Allier.
Migout.	Jean-Charles-Baptiste.	Paris.	Seine.
Monnet.	Jean-Joseph.	Lons-le-Saulnier.	Jura.
Munier.	Charles-Christophe.	Pont-à-Mousson	Meurthe.
Mutrecy dit Maréchal.	Paul-Emile.	Paris.	Seine.
Narjot.	Etienne.	Nevers.	Nièvre.
Nisot.	Emile.	Saint-Cloud.	Seine-et-Oise.
Oblet.	Charles-Philippe-Henri.	Paris.	Seine.
Olivier.	Théodore.	Lyon.	Rhône.
Patau.	Georges-Franç.-Marc.	Vinça.	Pyrén.-Orient.
Paulin.	Charles-Antoine.	Soreze.	Tarn.
Perrodon.	Octave-Claude-Emile.	Neyron.	Ain.
Petit-Dufrénoy.	Ours-Pierre-Armand.	Sevran.	Seine-et-Oise.
Peytier.	Jean-Pierre-Eugène-Félicien.	Genestelle.	Ardèche.
Pinac.	Etienne.	Bagnères-Adour	Hautes-Pyrén.
Pinel.	Louis-Pierre.	Saint-James.	Manche.
Poedevin.	Claude-Anastase.	Tessel.	Calvados.
Pottier.	Colza.	Honfleur.	Calvados.
Prat.	Jean-Ant.-Ferdinand.	Turin.	Pô.
Pressou.	Henri-Eugène.	Dreux.	Eure-et-Loir.
Protche.	Jean.	Metz.	Moselle.
Provigny.	Albert.	Paris.	Seine.
Puillon Boblaye.	Emile.	Napoléonville.	Morbihan.
Puissant.	Louis.	Agen.	Lot-et-Garonne
Rachia.	Paul-Romuald.	Bene.	Stura.
Rangouse.	Antoine-Hyppolite.	Agen.	Lot-et-Garonne
Reguis.	Jean-Camille.	Marseille.	Bouc.-du-Rh.
Renouard de Saint-Loup.	Charles-Pierre.	Chartres.	Eure-et-Loir.
Reynaud Villeverd.	Armand-Ch.-François.	Paris.	Seine.
Robert Dugardier.	Charles-Antoine-Julien.	Sablon.	Isére.
Rossi.	Ambroise-Vinc.-Marie.	Alexandrie.	Marengo.
Ruinet.	Marie-Théophile.	Quimper.	Finistère.
Salenave.	Eugène-Léonard.	Bayonne.	Basses-Pyrén.
Sarrieu.	Henri.	Toulouse.	Haute-Garonne

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Schneider.	Antoine-Septidi.	Paris.	Seine.
Sers.	Alexandre-Victor.	Paris.	Seine.
Serton du Plonget.	André.	Anières.	Charente-Infér.
Severac.	Joseph-Honoré-Marie.	Saint-Félix	Haute-Garonne
Sobrero.	Charles-Raphaël.	Cavalimour.	Stura.
Soubeiran.	Scipion.	Paris.	Seine.
Stocard.	Jean-Pierre-Isaac.	Essonne.	Seine-et-Oise.
Tardy.	Anselme-Louis.	Ferney-Voltaire	Léman.
Tattet.	Jacques-Ch.-Alexandre.	Paris.	Seine.
Terson.	Anacharsis-Elisée.	Revel.	Haute-Garonne
Thibaud.	Georges.	Grenoble.	Isère.
Tilli Kerveno.	Alexandre-Etienne.	Corlay.	Côtes-du-Nord.
Vandelin Daugerans.	Jean-Baptiste-Marie-Gabriel-Maxime.	Lauwin Planque	Nord.
Vergès.	Fortuné.	Arnouville.	Eure-et-Loir.
Vérité.	Alexandre-Eugène.	Paris.	Seine.
Vimal-Teyras.	Jean-François.	Saint-Amant-Roche-Savine	Puy-de-Dôme.
Vincent.	Jean-Antoine-Aza.	Marseille.	Bouc.-du-Rh.
Vouzeau.	Ch.-Franç.-Xavier.	Belfort.	Haut-Rhin.
Zéni.	Alphonse-Louis.	Paris.	Seine.

Admission dans les services publics.

Le Jury, présidé par S. Exc. M. le Gouverneur, et composé des deux examinateurs permanens, MM. Legendre et Lacroix, et des deux examinateurs temporaires, MM. Malus et Descotils, a arrêté le 30 septembre 1811 les listes suivantes par ordre de mérite, savoir :

Artillerie de terre. MM. Monneret, Morel, Desmaretz de Palis, d'Harnois, Hetzrodt, Douzon, Vieillard, Henry, Raingue1, Lacroix, Menot, Lafont du Cujula, Cunier, Marquis, Ducy, Prévost-Longpérier, Rollandy, Tascher, Patas de Mesliers, Vincens, Deviefsville, Dubois, Philippé, Schneider, Daniel, Poullain, Lavallée, Sirveaux, Delagrye, Blanchard, Bonnière, Herval, Chateaurenaud, Lethierry, Rely, Goy, Bastide, Pey, Morel-Duesme, Odiot. 40

Génie militaire. MM. Vanéechout, Picerron de Mondesir, Bonnier, Frotier de la Messelière, Latour, Yver de la Bruchollerie, Molina, Parentin, Pastey, Gallice, Ketelbuter,

Gibou, Urban, David, Daigremont, Challaye, Letard de Labouralière, Radepont, Labarrière, Millon, Berthelot de la Durandière, Duport, Cotelle, Peltier, Pichot-Lamabilais, Costa, Liébaut, Lemoine (François), Claudel, Kersaint, Willmar, Lendy, Ollivier (J.-B.-V.), Castel, Dupont, Barbedette, Gueze, Lambert (Charles), Louis, Tabareau, Solier, Goblet, Prié, Desbrochers, Depigny, Maignen, Gay, Herault, Crestin-Doussières, Boistard........................... 50

Ponts et Chaussées. MM. Mosca, Trotté-Laroche, Martin, Blondat, Griffet-Labaume (G.-C.), Drappier, Trona, Legrand, Mondot, Bardonnaut, Bourrousse-Laffore (M.-A.), Prus, Limousin, Bertault, Delarue, Chancel, Vallot, Cabrol, Lesecq, Raucourt, Besson, Bourrousse-Laffore (J.-S.), Laval, Courant, Dreppe, Messey, Dufour, Baumal, Gonet, Lemoyne (J.-J.), Bédigie, Beaudemoulin............. 32

Ingénieurs Géographes. MM. Fessard, Levillain, Péqueult de la Varande, Dechastelus, Lefebvre (L.-H.), Loreilhe.... 6

Mines. MM. André, Parrot, Juncker, Dissandes-Monlevade, Duron.............................. 5

Construction des Vaisseaux. MM. Poumeyrol, Roget, Mimerel, Proust, Legrix, Zedé, Nosereau, Delamorinière, Chapuy, Sauvageot, Binet (P.-T.)................ 11

Poudres et Salpêtres. MM. Perruchot, Petin......... 2

Démissionnaires. MM. Andrieu, Barthes, Clausade, Dubus, Lancelin, Leprince, Petitot de Mont-Louis........... 7

N'ont pas rejoint. MM. Lindenmeyer, Patau (1)...... 2

Réformés pour cause de mauvaise santé. MM. Delaborde, Galis, Rieffel.............................. 3

Morts. MM. Cardon, Boileau, Boylesve (2)....... 3

---

(1) Ces deux élèves se sont de nouveau présentés au concours, et ont été réadmis à dater du 1er. novembre 1811.

(2) Ces trois élèves sont morts chez leurs parens, où ils étoient en congé.

Etat de situation des Elèves de l'Ecole Polytechnique à l'époque du 1er. novembre 1811, et résultat des opérations des Jurys d'admission dans les services publics, de passage de la seconde à la première division, et d'admission à l'Ecole.

L'Ecole étoit composée, au 1er novembre 1810, de 337 Elèves.

SAVOIR :

1re. division	159	337.
2^{e}. division	178	

Elle a perdu dans le cours de l'année,

Morts	1re. division	2	3	161.
	2^{e}. division	1		
Démissionnaires	1re. division	3	7	
	2^{e}. division	4		
N'ont pas rejoint (2^{e}. division)			2	
Réformés pour cause de mauvaise santé (2^{e}.div.)			3	
Admis dans les services publics.				
Artillerie de terre			40	
Génie militaire			50	
Ponts-et-Chaussées			32	
Ingénieurs-géographes			6	
Mines			5	
Construction des Vaisseaux			11	
Poudres et Salpêtres			2	

A la fin de l'année scholaire, l'Ecole restoit composée de 176 élèves.

SAVOIR :

1re. division	7	176.
2^{e}. division	169	

Report. . . . . . .

Le Jury a pensé que, sur les 169 élèves qui composoient la 2e. division, 157 étoient susceptibles de passer à la 1re. division, et que 12 devoient faire une seconde année dans cette division. Il en résulte que la nouvelle 1re. division s'est trouvée composée de 164 élèves.

Ajoutant aux 176 élèves qui restent à l'Ecole les 165 qui ont été admis au concours de cette année, ci. . . . . .

L'école s'est trouvée composée au 1er. novembre 1811 de 341 élèves,

SAVOIR :

1re. division.	164
2e. division.	177

CORRESPONDANCE

SUR

ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

Tome II, 4e. *cahier*, *pag*. 313 — 382; *4 planc. in-fol.*,
Juillet 1812.

TABLE

ES MATIÈRES CONTENUES DANS CE CAHIER.

---

§. I.

Des caustiques par réflexion et par réfraction ; par M. PETIT.

Sur les axes principaux ; par M. LEFEBURE DE FOURCY.

Sur les polyèdres ; par M. CAUCHY.

---

§. II.

Annonces d'ouvrages.

---

§. III.

Personnel.

Promotions des anciens élèves de l'Ecole Polytechnique à [illegible] grades supérieurs.

Conseil de perfectionnement de l'Ecole Polytechnique.

Liste des élèves admis en 1811 à l'Ecole Polytechnique.

A
8 (1)

Cours de Géométrie Descriptive, Par Mr. Hachette.

Plans Tangens

Planche A.

Hyperboloïde à une nappe.

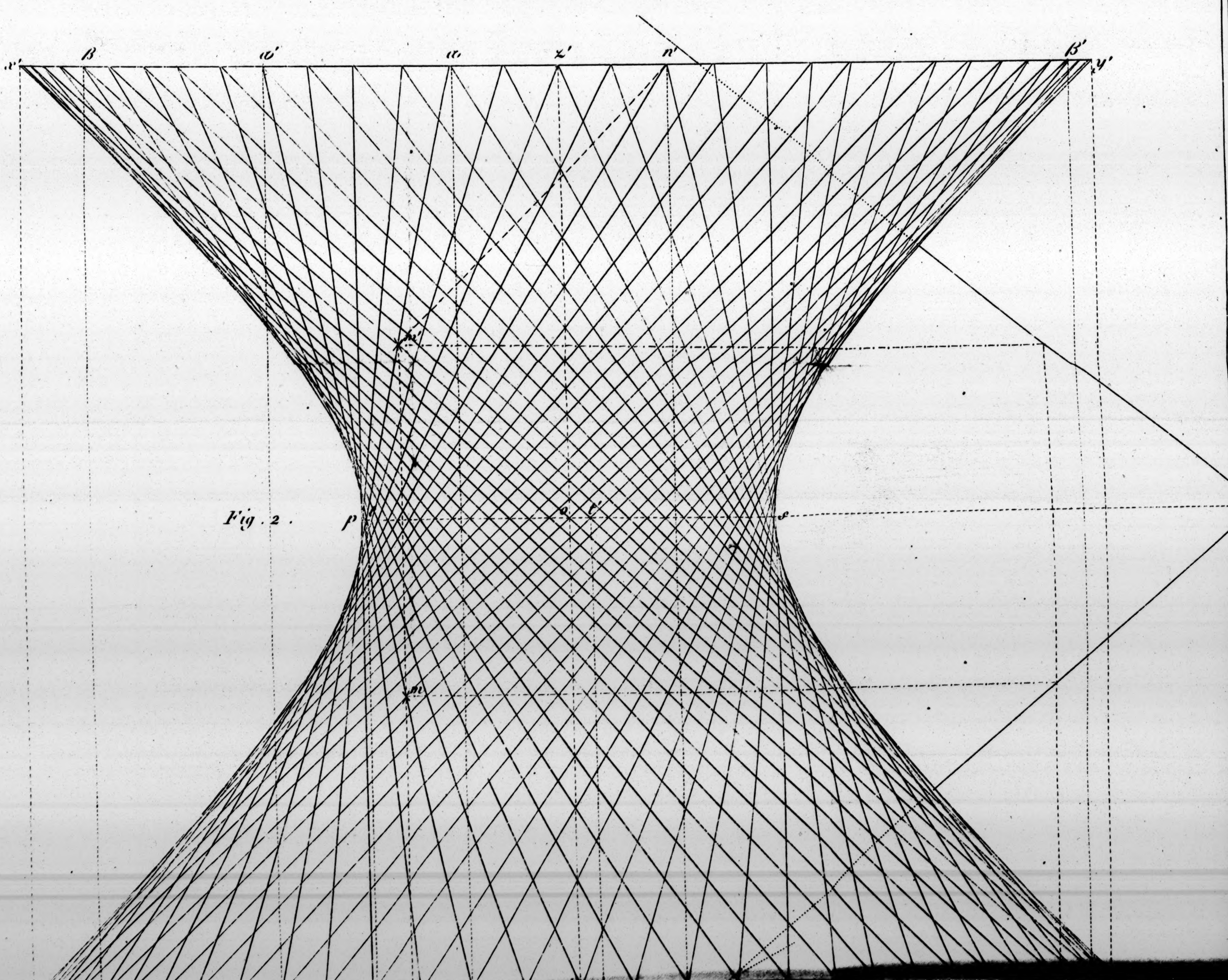
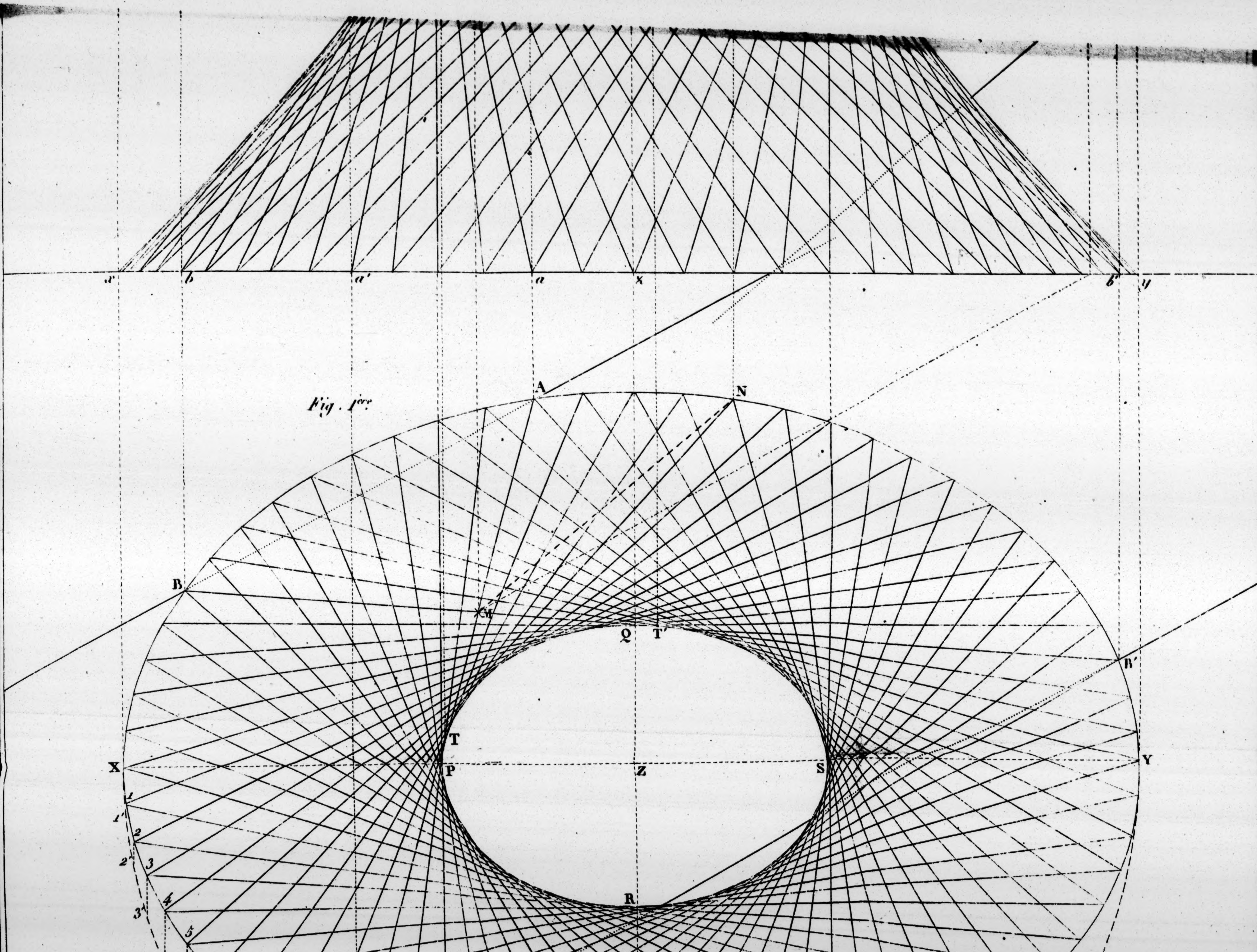


Fig. 2.

. Petit.
acy.

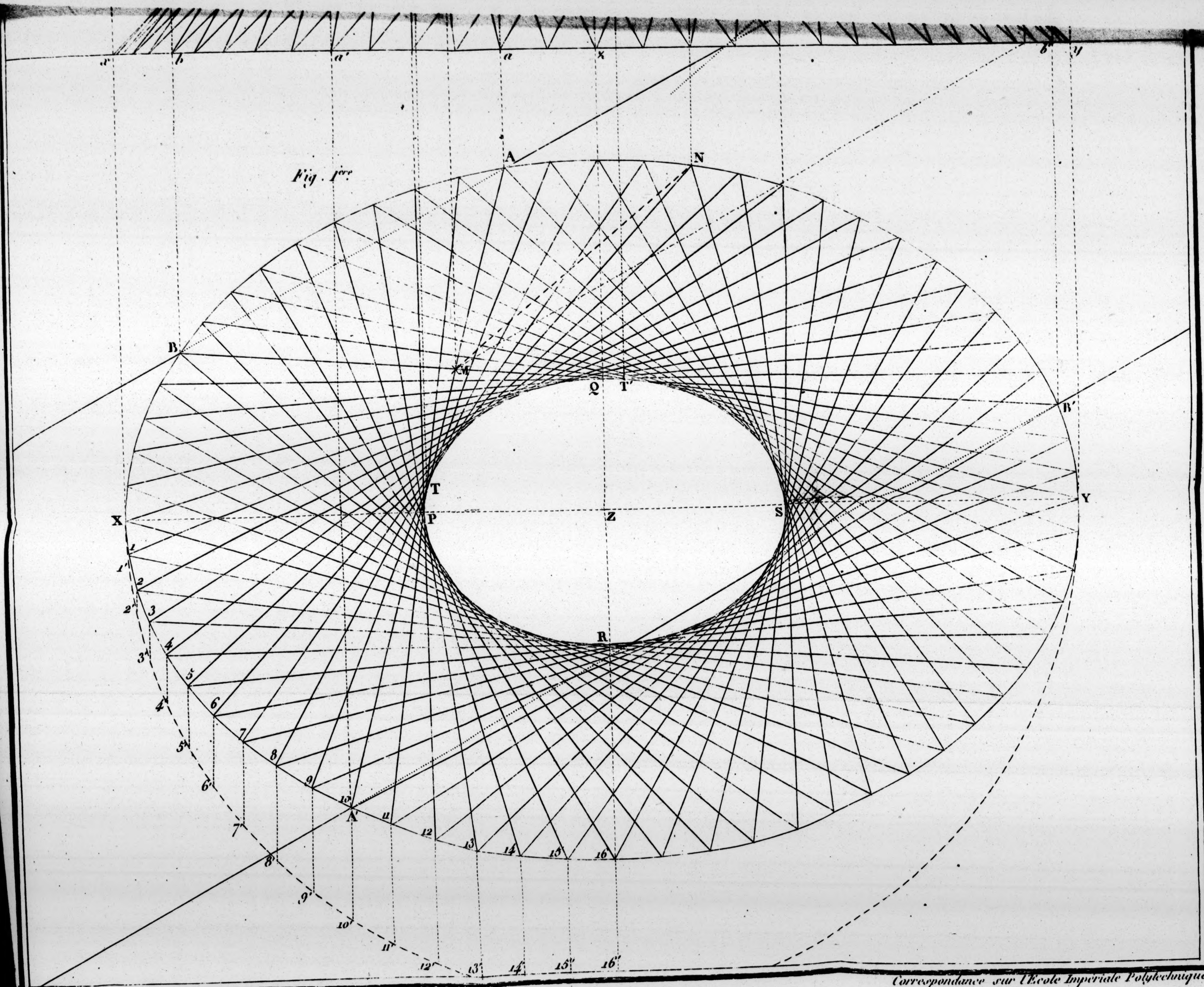
nique à des

ique.



a'
b
a'
a
x
b'
y
A
N
B
M
Q
T'
B'
T
X
P
Z
S
Y
R
A'
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
1'
2'
3'
4'
5'
6'
7'
8'
9'
10'

Fig. 1ère



Girard del.

Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique
Tome 2, Cahier 4. Mai 1812.

Cours de Géométrie Descriptive, Par Mr. Hachette.

Planche B

Pyramide triangulaire.

Fig. 2.

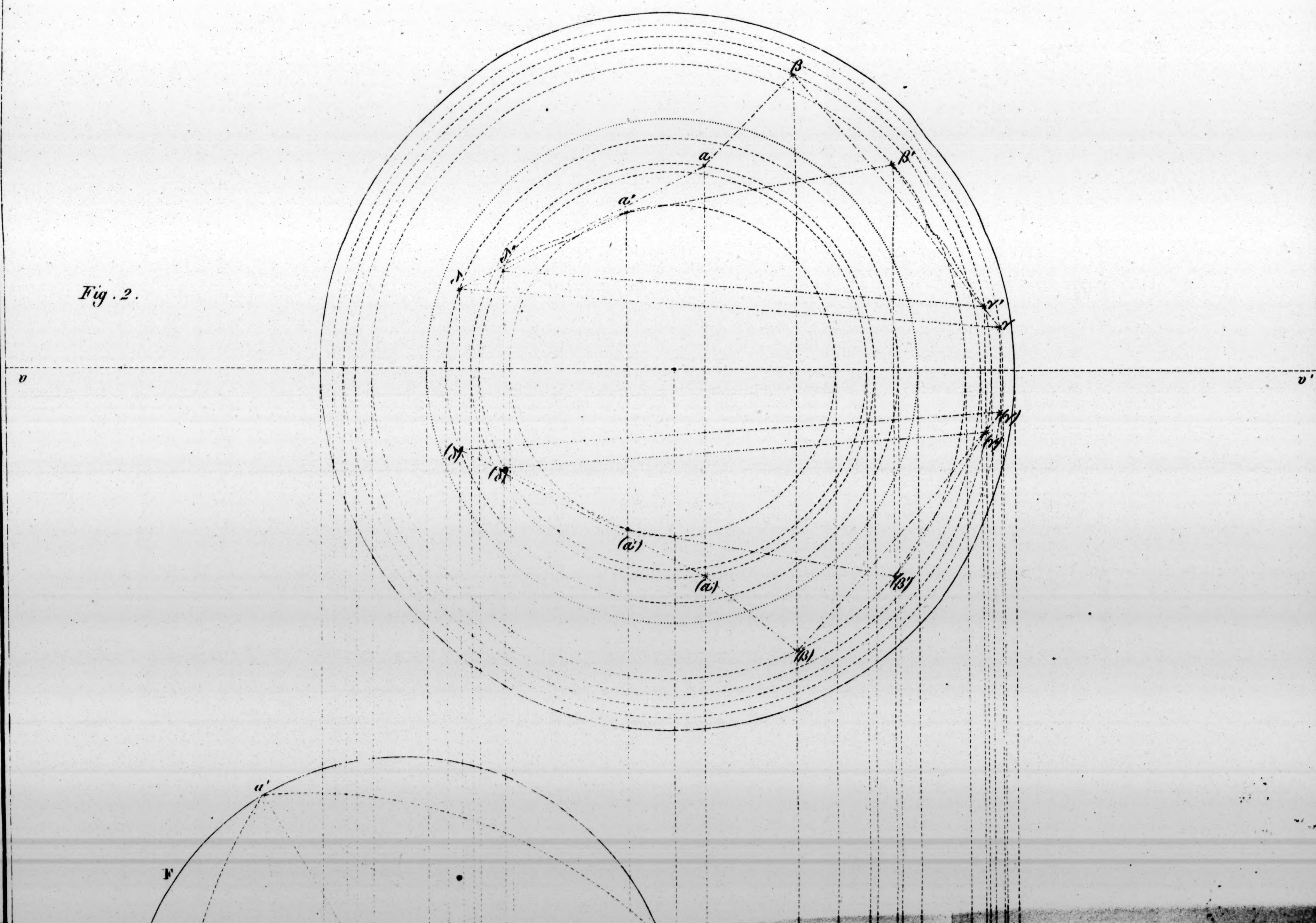
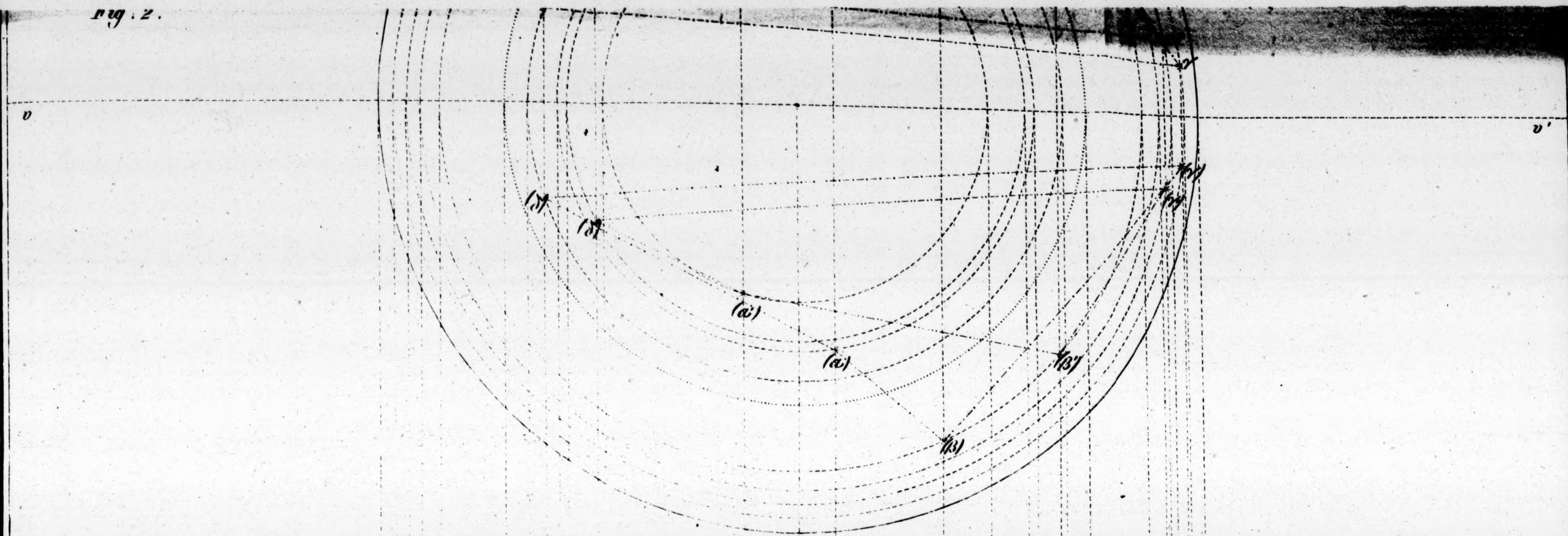


Fig. 2.



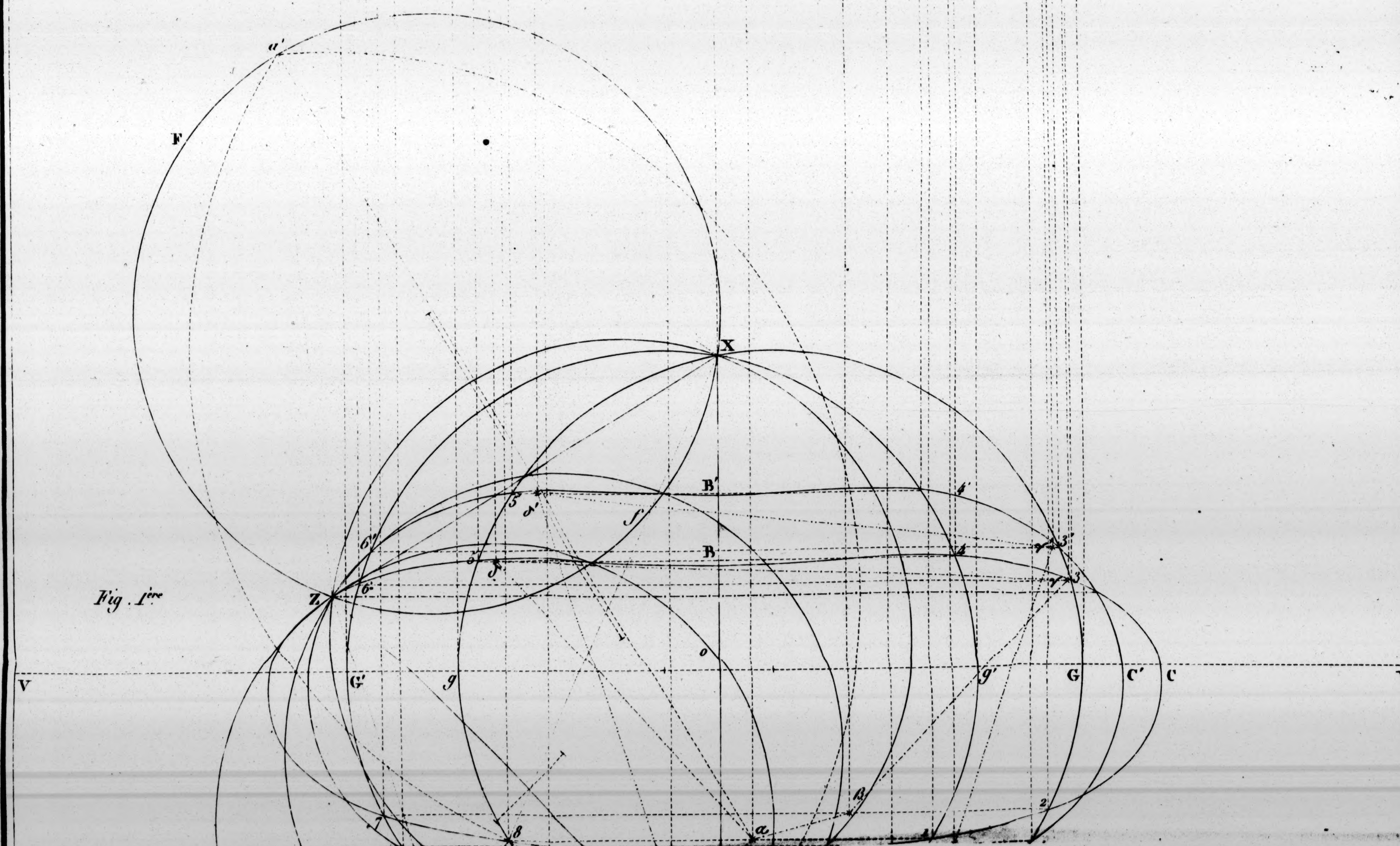
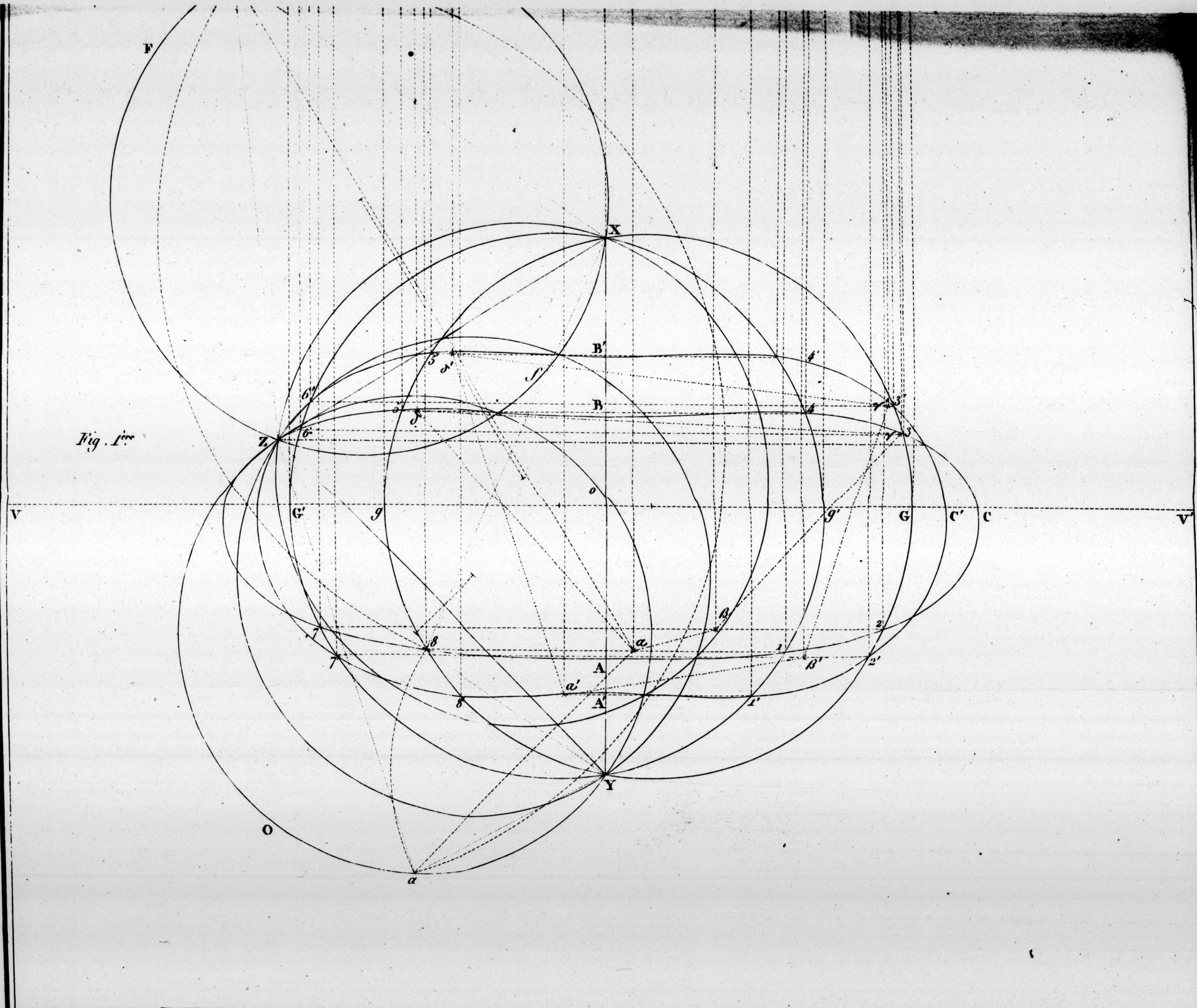


Fig. 1ère

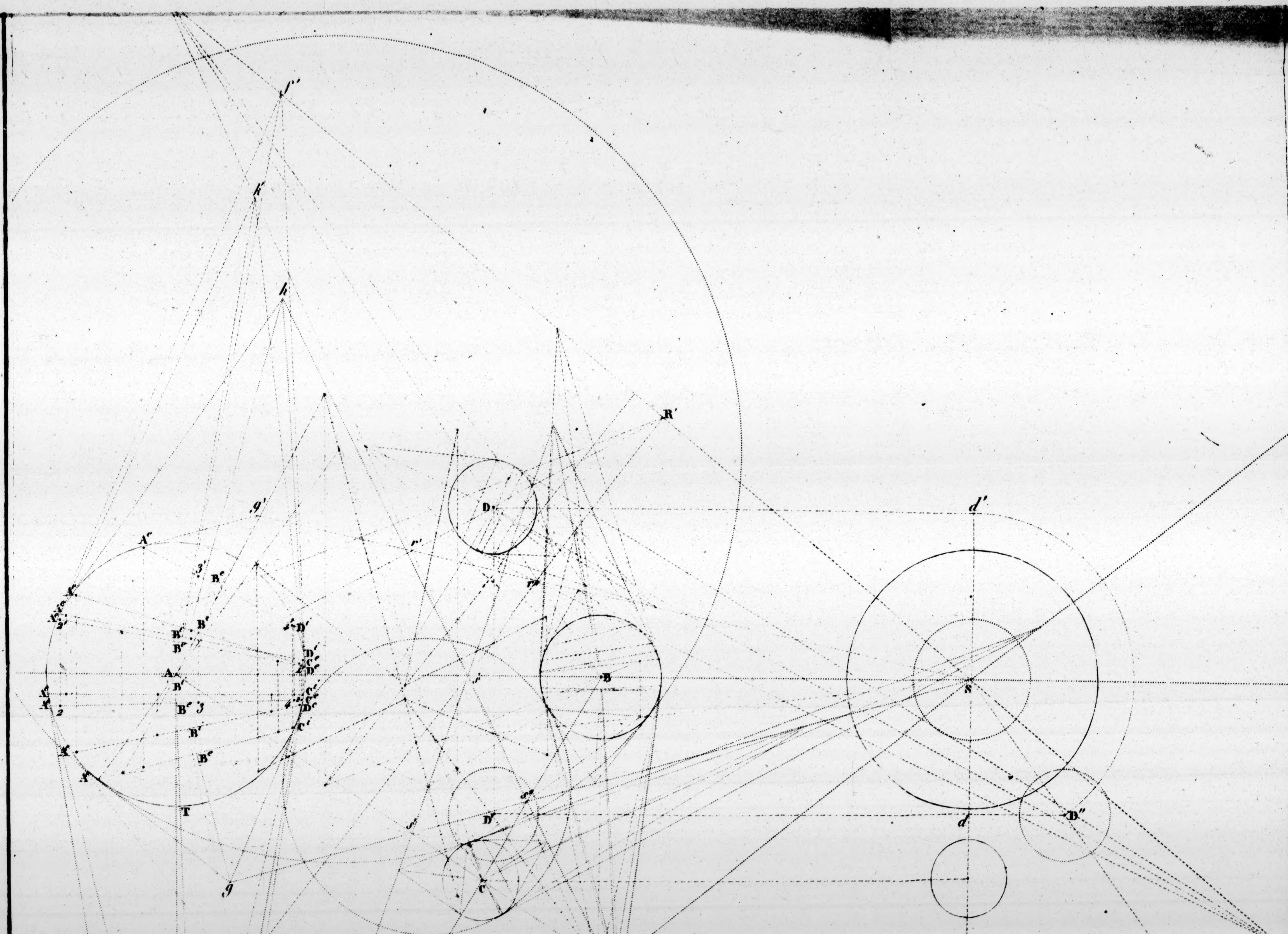
Fig. 1re

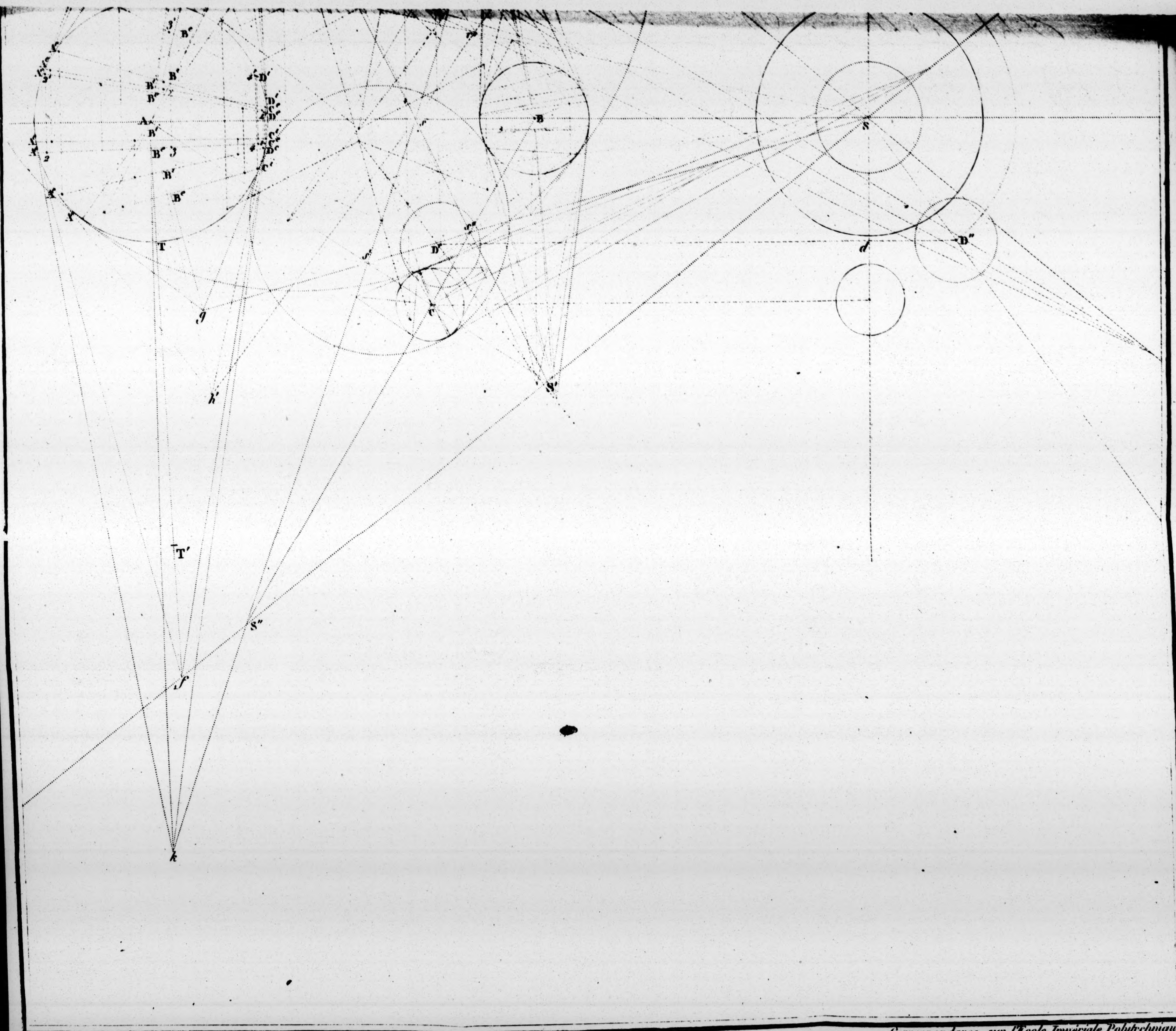


Cours de Géométrie Descriptive, Par Mr. Hachette

Planche C.

de la Sphère tangente à quatre Sphères données.



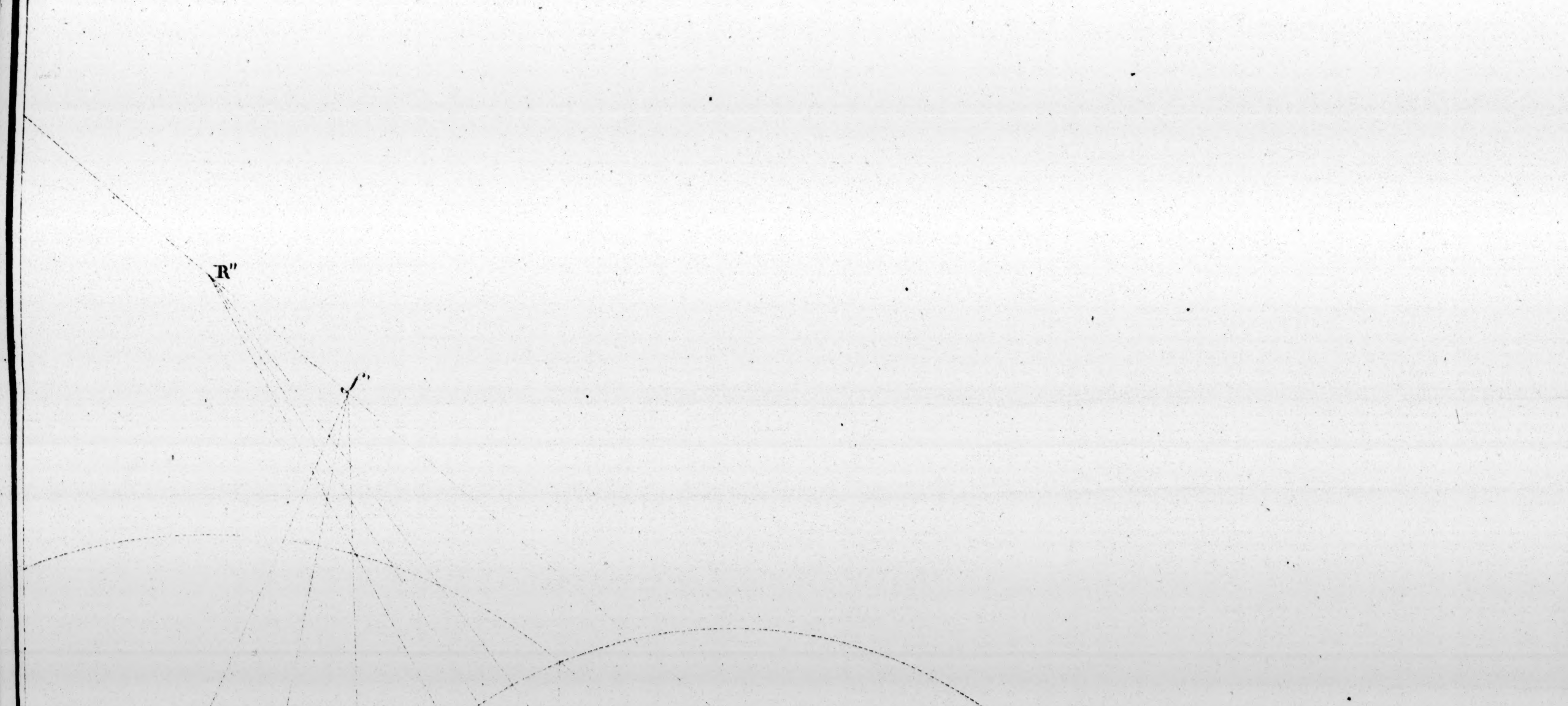


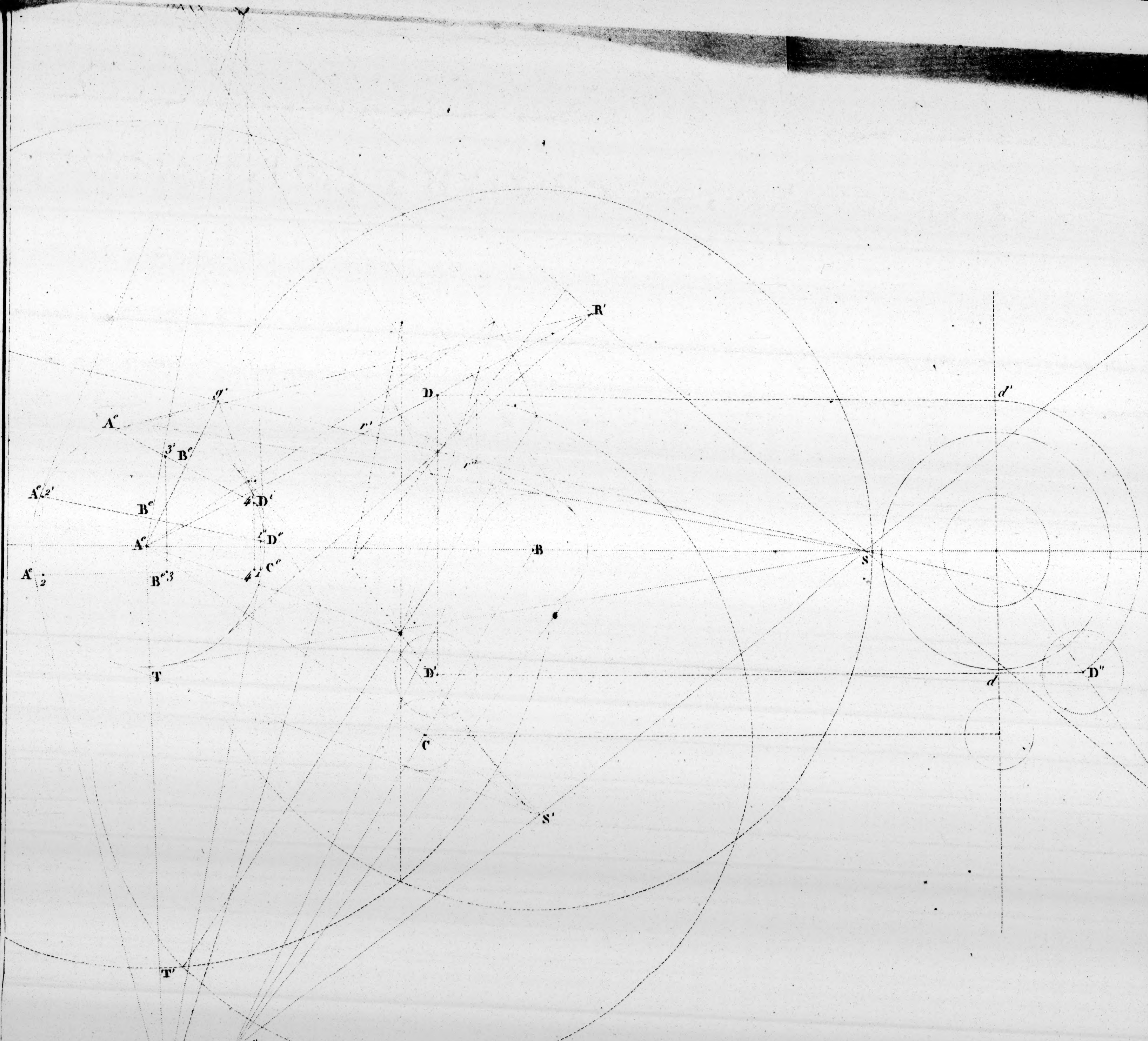
Girard del.

Cours de Géométrie Descriptive, Par M.r Hachette.

Planche D.

De la Sphère tangente à quatre Sphères données





Optique

Fig. (a)

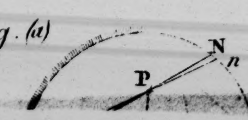
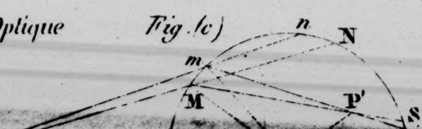
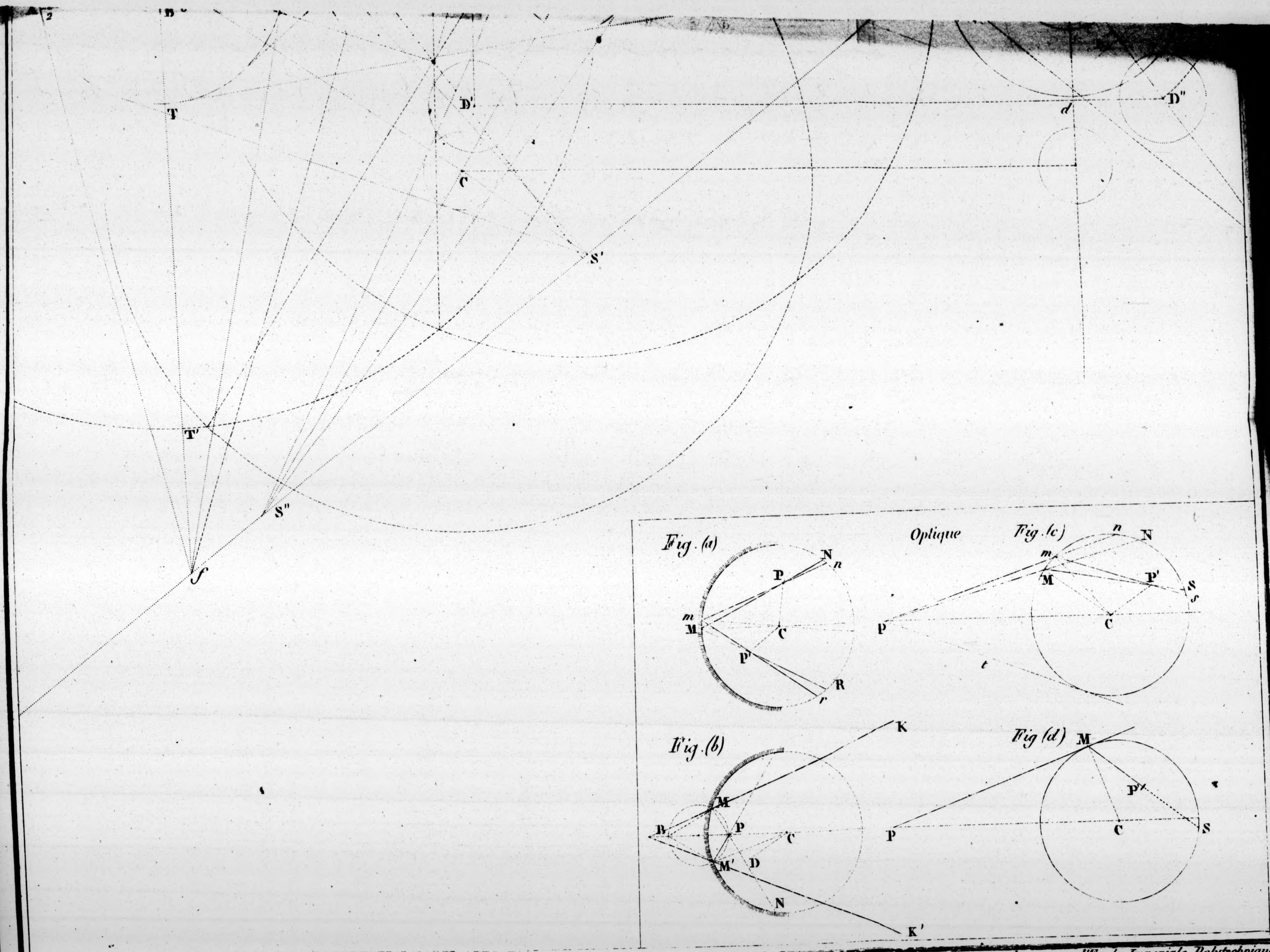


Fig. (c)





Girard del.

L'I

« I
» et
l'une
Vo
résolu

n =
c'est-à
gone
volum
déterm
tangen
tangen
courbe